Stochastik

Serie 6

1. Allgemeine Betrachtung des Erwartungswertes $E(X^n)$ der gegebenen Verteilung: Fallunterscheidung:

   - n ungerade:
     (Anmerkung: Die Wahrscheinlichkeit p ist konstant gegeben)

     $$\begin{aligned} E(X^n) &= \sum_{k=-N}^{N} k^n \cdot p \\ &= 0 \end{aligned}$$

   - n gerade:

     $$\begin{aligned} E(X^n) &= \sum_{k=-N}^{N} k^n \cdot p \\ &= p \cdot 2 \sum_{k=1}^{N} k^n \\ &> 0 \end{aligned}$$

   Die Kovarianz ist gegeben durch: $C(X,Y) = E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y)))$

   Daraus ergibt sich für $C(X, X^n)$ folgendes:
   Fallunterscheidung:

   - n ungerade:

     $$\begin{aligned} C(X, X^n) &= E((X - E(X)) \cdot (X^n - E(X^n))) \\ &= E((X - 0) \cdot (X^n - 0)) \\ &= E(X \cdot X^n) \\ &= E\left(X^{n+1}\right) \end{aligned}$$

     Da $n+1$ gerade ist die Kovarianz > 0, d.h. X und X^n korrelieren.

   - n gerade:

     $$\begin{aligned} C(X, X^n) &= E((X - E(X)) \cdot (X^n - E(X^n))) \\ &= E((X - 0) \cdot (X^n - E(X^n))) \\ &= E(X \cdot X^n) - 0 \cdot E(X^n) \\ &= E\left(X^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Da n gerade ist, ist $n+1$ ungerade. Somit ist der Erwartungswert wie oben gezeigt null, d.h. die Kovarianz ist null. Dies bedeutet daß X und X^n nicht korrelieren.

Berechnung von $C\left((X,X\right) = E\left(X^2\right)$:

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \frac{1}{2N+1} \cdot 2 \cdot \sum_{k=1}^{N} k^2 \\
&= \frac{2}{2N+1} \cdot \frac{N\left(N+1\right)\left(2N+1\right)}{6} \\
&= \frac{N\left(N+1\right)}{3}
\end{aligned}$$

Berechnung von $C\left(X, X^2\right) = E\left(X^3\right) = 0$.

2.

$$f_x(y) = \begin{cases} \alpha \cdot e^{-\alpha y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{X} (x)dx = 1 - e^{-ax}$$

$$\begin{aligned}
F_{X^2}(x) &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) \quad x \geq 0 \\
&= 1 - e^{-\alpha\sqrt{x}} - 1 + e^{\alpha\sqrt{x}} \quad x \geq 0 \\
F_{X^2}(x) &= x < 0 \\
f_{X^2}(x) &= F'_{X^2}(x) = e^{\alpha\sqrt{x}} \cdot \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} = \left(e^{\alpha\sqrt{x}} + e^{-\alpha\sqrt{x}}\right) \cdot \frac{-\alpha}{2\sqrt{x}} \quad x \geq 0
\end{aligned}$$

$$f_{X^2}(x) = \begin{cases} \left(e^{\alpha\sqrt{x}} + e^{-\alpha\sqrt{x}}\right) \cdot \frac{-\alpha}{2\sqrt{x}} & x \geq 0 \\ \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

3. Gegeben sei die Dichte der Zufallsgröße (X,Y) :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot \left(1 - xy^3\right) & \text{für } x,y \in [-1,1] \times [-1,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{X,Y}(x,y)dxdy &= \int_{-1}^{1} 2cdy \\
&= [2cy]_{-1}^{1} \\
&= 4c \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow c = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f_{X,Y}(x,y)dx &= \int_{-1}^{1} c\left(1 - xy^3\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(c - cxy^3\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} cdx - \int_{-1}^{1} cxy^3 dx \\
&= \left[cx - \frac{cy^3}{2}x^2\right]_{-1}^{1} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Die Kovarianz berechnet sich nun folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-1}^{1} x \int_{-1}^{1} f_{X,Y}(x,y)dydx \\
E(X) &= \int_{-1}^{1} y \int_{-1}^{1} f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
E(X \cdot Y) &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f_{X,Y}(x,y)dy &= \int_{-1}^{1} \left(c - cxy^3\right) dy \\
&= \left[cy - \frac{cx}{4}y^4\right]_{-1}^{1} \\
&= 2c \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{1} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{-1}^{1} \left(c - cxy^3\right) dy$$

$$\begin{aligned} &= \left[cx - \frac{cy^2}{4}x^2\right]_{-1}^{1} \\ &= 2c \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2} \\ E(Y) &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} y dx \\ &= \left[\frac{1}{4}y^2\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2} \\ E(X \cdot Y) &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x,y) dx dy \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (xyc - cx^2y^4) dx dy \\ &= -\left[\frac{2cy^5}{15}\right]_{-1}^{1} \\ &= -\frac{1}{15} \end{aligned}$$

Und somit ergibt sich letztendlich für die Kovarianz:

$C(X \cdot Y) = -\frac{1}{15} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = -\frac{19}{60}$

4. a) X hat eine Verteilungsdichte von $f_X(y) = \cos(y\pi)$ und Y hat eine Verteilungsdichte von $f_Y(x) = \sin(x\pi)$.
   Die Verteilungsdichte von R ist somit: $R = 1$

   b) Jeder x-Koordinate am Rand vom Kreis K ist genau eine y-Koordinate zugeordnet. Wenn x sich ändert, muß y sich auch ändern (ansonsten läge der Auftreffpunkt P außerhalb von K). Somit sind die Zufallsgößen X und Y stochastisch abhängig.

5. Da es sich hierbei um stochastisch unabhängige stetige Zufallsgrößen handelt die Verteilung gleichmäßig ist ergibt sich folgendes:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$F_{X+Y}(t) = 0 \qquad$ für alle $-2 < t < 2$

Somit ergeben sich zwei Fälle:

Fall 1:

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(t) &= \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{2}}^{\frac{t}{\sqrt{2}}}(x+\sqrt{2})dx \\ &= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2}x]_{-\sqrt{2}}^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{t^2}{8}+\frac{t}{2}+\frac{1}{2} \\ f_{X+Y}(t) &= F'_{X+Y}(t) \\ &= \frac{1}{4}(t+2) \end{aligned}$$

Fall 2:

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(t) &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{t}{\sqrt{2}}}(-x+\sqrt{2})dx+\frac{1}{2} \\ &= -\frac{t^2}{8}+\frac{t}{2}+\frac{1}{2} \\ f_{X+Y}(t) &= F'_{X+Y}(t) \\ &= \frac{1}{4}(2-t) \end{aligned}$$

Und dadurch erhält man die Verteilungsdichten für X + Y:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t+2) & \text{für } -2 \leq t \leq 0 \\ \frac{1}{4}(2-t) & \text{für } 0 < t \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

6. a) Hier der Sourcecode:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>

#define N       100
#define FSIZE   10
#define LINKSO  1/12.0
#define LINKS   2/12.0
#define LINKSU  3/12.0
#define RECHTSO 4/12.0
#define RECHTS  5/12.0
#define RECHTSU 6/12.0
#define OBEN    1/2.0 + 1/6.0
#define KEINE   1/2.0 + 2/6.0
#define UNTEN   1
#define BLACK   0x0
#define WHITE   0xff

char field[2*(N+1)*FSIZE][2*(N+1)*FSIZE];


/**********************************************************
 * Liefert eine Zufallszahl zwischen [0,1)
 */
double myrandom() {
  return rand()/(double)RAND_MAX;
}


void writeField(void) {
  FILE *fieldFile;

  fieldFile = fopen("field.raw", "w+");
  fwrite(&field, sizeof(field), 1, fieldFile);
  fclose(fieldFile);
}

/**********************************************************
 * main
 */
int main() {
  int i, j;
  double zfz;
  int posx = N * FSIZE + FSIZE / 2;
  int posy = N * FSIZE + FSIZE / 2;

  // initialisiere Zufallsgenerator
  srand(time(0));
```

```
// setze das Spielfeld auf 0xff (weiss)
memset(&field, WHITE, sizeof(field));

// setze die Spielfigur
field[posx][posy] = 0;

// simuliere die Speilzuege
for(i = 0; i < N; i++) {

  zfz = myrandom();
  if (zfz < LINKSO) {
    printf("Bewegung nach links oben.\n");

    for (j = 0; j < FSIZE; j++) {
      posx--;
      posy++;
      field[posx][posy] = BLACK;
    }

  } else if (zfz < LINKS) {
    printf("Bewegung nach links.\n");
    for (j = 0; j < FSIZE; j++) {
      posx--;
      field[posx][posy] = BLACK;
    }

  } else if (zfz < LINKSU) {
    printf("Bewegung nach links unten.\n");
    for (j = 0; j < FSIZE; j++) {
      posx--;
      posy++;
      field[posx][posy] = BLACK;
    }

  } else if (zfz < RECHTSO) {
    printf("Bewegung nach rechts oben.\n");
    for (j = 0; j < FSIZE; j++) {
      posx++;
      posy--;
      field[posx][posy] = BLACK;
    }

  } else if (zfz < RECHTS) {
    printf("Bewegung nach rechts.\n");
    for (j = 0; j < FSIZE; j++) {
      posx++;
      field[posx][posy] = BLACK;
    }
```

```
      } else if (zfz < RECHTSU) {
        printf("Bewegung nach rechts unten.\n");
        for (j = 0; j < FSIZE; j++) {
          posx++;
          posy++;
          field[posx][posy] = BLACK;
        }

      } else if (zfz < OBEN) {
        printf("Bewegung nach oben.\n");
        for (j = 0; j < FSIZE; j++) {
          posy--;
          field[posx][posy] = BLACK;
        }

      } else if (zfz < KEINE) {
        printf("Keine Bewegung.\n");

      } else if (zfz < UNTEN) {
        printf("Bewegung nach unten.\n");
        for (j = 0; j < FSIZE; j++) {
          posy++;
          field[posx][posy] = BLACK;
        }
      }
      // markiere standpunkt
      field[posx-1][posy] = BLACK;
      field[posx+1][posy] = BLACK;
      field[posx][posy-1] = BLACK;
      field[posx][posy+1] = BLACK;
    }

    // write the field to a raw data graphics file
    writeField();

    return EXIT_SUCCESS;
  }
```

b) . . . und hier die Ergebnisse. Ich habe drei Versuche durchgeführt:

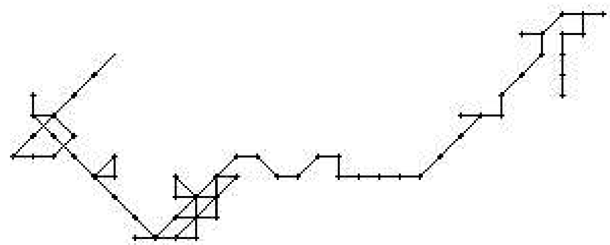

Abbildung 1: Erster Versuch

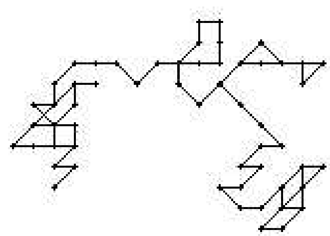

Abbildung 2: Zweiter Versuch

Hier nochmal die Textausgabe des dritten Versuches:

```
Bewegung nach links.
Bewegung nach unten.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach rechts unten.
Bewegung nach links unten.
Bewegung nach rechts unten.
Bewegung nach rechts oben.
Bewegung nach rechts unten.
Bewegung nach unten.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach rechts.
Bewegung nach links oben.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach links unten.
Keine Bewegung.
Bewegung nach unten.
Bewegung nach unten.
Bewegung nach unten.
Bewegung nach rechts oben.
Bewegung nach rechts unten.
```

Arne Brutschy
8964813

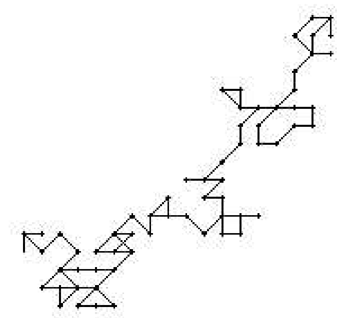

Abbildung 3: Dritter Versuch

```
Bewegung nach oben.
Keine Bewegung.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach links oben.
Bewegung nach links unten.
Bewegung nach links oben.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach links oben.
Keine Bewegung.
Bewegung nach rechts unten.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach links unten.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach links oben.
Bewegung nach rechts unten.
Bewegung nach links.
Bewegung nach unten.
Bewegung nach links.
Keine Bewegung.
Bewegung nach rechts oben.
Bewegung nach links unten.
Bewegung nach rechts.
Bewegung nach unten.
Bewegung nach rechts unten.
Bewegung nach links oben.
Keine Bewegung.
Bewegung nach rechts.
Bewegung nach unten.
Bewegung nach links.
Bewegung nach unten.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach unten.
Bewegung nach oben.
```

```
Bewegung nach oben.
Bewegung nach links.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach links unten.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach unten.
Bewegung nach links oben.
Bewegung nach links unten.
Bewegung nach links.
Keine Bewegung.
Bewegung nach links unten.
Bewegung nach oben.
Keine Bewegung.
Bewegung nach links.
Keine Bewegung.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach rechts unten.
Bewegung nach unten.
Bewegung nach unten.
Bewegung nach rechts oben.
Bewegung nach rechts.
Bewegung nach unten.
Bewegung nach links oben.
Keine Bewegung.
Bewegung nach unten.
Bewegung nach links.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach links oben.
Bewegung nach links.
Bewegung nach links oben.
Bewegung nach links.
Keine Bewegung.
Bewegung nach links unten.
Keine Bewegung.
Bewegung nach rechts.
Bewegung nach links.
Keine Bewegung.
Bewegung nach oben.
Bewegung nach rechts oben.
Bewegung nach rechts unten.
Keine Bewegung.
Bewegung nach unten.
```