Stochastik

Serie 4

1. $P(M_1) = P(M_2) = 0.5$
   $P(K|M_1) = 0.05$
   $P(K|M_2) = 0.01$

$$\begin{aligned}
P(M_1|K) &= \frac{P(K|M_1) \cdot P(M_1)}{P(K|M_1) \cdot P(M_1) + P(K|\overline{M_1}) \cdot P(\overline{M_1})} \\
&= \frac{P(K|M_1) \cdot P(M_1)}{P(K|M_1) \cdot P(M_1) + P(K|M_2) \cdot P(M_2)} \\
&= \frac{0.05 \cdot 0.5}{0.05 \cdot 0.5 + 0.01 \cdot 0.05} \\
&= \frac{5}{6} \approx 0.83
\end{aligned}$$

   Die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig herausgegriffener Kranker zur Gruppe M_1 gehört, beträgt ca. 83%.

2. Ich konstruiere eine geometrische Folge:

   $s_n = 0.9$, $a_1 = 0.08$, $q = 0.92$

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \\
n &= \log_q \frac{s_n}{a_1} \cdot (q-1) + 1 \\
&\approx 27.61
\end{aligned}$$

   Es werden also mindestens 28 Fahrgäste benötigt, damit der Kontrolleur mit 90%iger Wahrscheinlichkeit einen Schwarzfahrer ertappt.

3. Ich nehme die Formel für die Binominialverteilung aus der Vorlesung und setze die gegebenen Werte ($p_3 = 0.1318$, $n = 6$, $k = 3$) ein:

$$p_k = \binom{6}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^3$$

   Daraus ergeben sich zwei (gerundete) Lösungen: $p \approx 0.25$ und $p \approx 0.75$.

   Wie man sieht ist p durch die gegebenen Werte nicht eindeutig festgelegt.

4. $E(X) = \sum_k \frac{45}{\pi^4} \cdot k^{-4} \cdot k$

   Diese Funktion ist punktsymmetrisch. Aufgrund der Punktsymmetrie ergibt die Summe der entprechenden linken und rechten Werte immer null.

   Somit ergibt sich ein Erwartungswert von null.

   Da $E(X) = 0$ gilt, ist

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_k (x_k^2 \cdot p_k) \\ &= \sum_k (k^2 \cdot \frac{45}{\pi^4} \cdot k^{-4}) \\ &= \sum_k \frac{45}{\pi^4 k^2} \\ &= \frac{90}{\pi^4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \\ &= \frac{15}{\pi^2} \approx 1.52 \end{aligned}$$

5. a) Auflistung aller Möglichen Ergebnisse:

x_k	1	2	3	4	6	8	9	12	16
p_k	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

   b) Berechnung des Erwartungswertes $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_k p_k \cdot x_k \\ &= \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{2}{16} + 3 \cdot \frac{2}{16} + 4 \cdot \frac{3}{16} + 6 \cdot \frac{2}{16} + 8 \cdot \frac{2}{16} + 9 \cdot \frac{1}{16} + 12 \cdot \frac{2}{16} + 16 \cdot \frac{1}{16} \\ &= 6.25 \end{aligned}$$

   Für die Berechnung der Standardabweichung σ benötigt man zuerst die Varianz $V(X)$. Die Formel der Varianz lautet: $V(X) = \sum_k \left((x_k - E(X))^2 \cdot p_k\right)$.

   Durch Einsetzen erhält man $V(X) = 17,1875$. Daraus lässt sich die Standardabweichung $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{17,1875} \approx 4,1458$ berechnen.

6. Hier mein Sourcecode zur Aufgabe:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <time.h>

typedef struct {
  double x, y;
```

```
} point_t;


double f(double x) {
  return(1 - pow(x, 3));
}


int monteCarlo(int n) {
  int i;
  int A_n = 0;
  point_t rndPoint;

  // init random
  srand((unsigned int) time(NULL));

  // n random Punkte ausrechnen und schauen
  // ob er <= f(x) ist
  for (i = 0; i < n; i++) {
    rndPoint.x = rand() / (double) RAND_MAX;
    rndPoint.y = rand() / (double) RAND_MAX;

    if (rndPoint.y <= f(rndPoint.x))
      A_n++;
  }

  return(A_n);
}


int main() {
  int n, A_n;

  for (n = 100; n <= 10000; n = n * 10) {
    A_n = monteCarlo(n);
    printf("Bei N = %d ist A_N = %d.\n", n, A_n);
    printf("Naeherung F_N = A_N / N = %f.\n\n", (A_n / (double) n));
  }
}
```

Das Programm liefert folgende Ergebnisse:

N	100	1000	10000
A_N	71	744	7522
F_N	0.7100	0.7440	0.7522

Der exakte Wert von $|F|$ ist 0.75. Man kann also deutlich erkennen wie mit zunehmender Anzahl der Zufallspunkte die Genauigkeit steigt.