Stochastik

Serie 3

1. Ich benutze das Fächermodell:

   Die möglichen Ergebnisse (einer Zuordnung) sind Elemente von Ω
   $Per_{10}^{10}(oW)$, mit $|\Omega| = 10!$.

   a) Eine Person erhält den richtigen Koffer:

   $$\begin{aligned} P(1\text{Richtiger}) &= \frac{F_{10,1}}{10!} \\ &= \frac{\frac{10!}{1!} \cdot \frac{1}{e}}{10!} \\ &= \frac{1}{e} \approx 0.368 \end{aligned}$$

   b) Drei Personen erhalten den richtigen Koffer:

   $$\begin{aligned} P(3\text{Richtige}) &= \frac{F_{10,3}}{10!} \\ &= \frac{\frac{10!}{3!} \cdot \frac{1}{e}}{10!} \\ &= \frac{1}{3! \cdot e} \approx 0.061 \end{aligned}$$

2. Die Wahrscheinlichkeit für fünf Richtige, wenn man weiß, daß man bereits drei Richtige hat, beträgt:

   $$\begin{aligned} P(5 \text{ Richtige}) &= \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{|\Omega|} \\ P(3 \text{ Richtige}) &= \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{|\Omega|} \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} P(5 \text{ Richtige}|3 \text{ Richtige}) &= \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}} \\ &= \frac{6 \cdot 43}{20 \cdot 12341} = \frac{3}{2870} \approx 0.001 \end{aligned}$$

3. a) Da es sich um eine ungerade Anzahl von Münzwürfen handelt, kann die Figur nur auf ungeraden Feldern zum stehen kommen. Bei drei Würfen kann sie sich somit nur auf den Feldern -3, -1, 1 und 3 befinden.

   Es gibt $2^3 = 8$ Möglichkeiten der Bewegung. Daraus ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

-3	-1	1	3
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

   b) Bei einer geraden Anzahl von Münzwürfen steht die Figur auf einem geraden Feld. Bei vier Würfen kann sie sich somit nur auf den Feldern -4, -2, 0, 2 und 4 befinden.

   Es gibt $2^4 = 16$ Möglichkeiten der Bewegung. Daraus ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

-4	-2	0	2	4
$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

4. a) Hier mein Quellcode:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <assert.h>
#include <time.h>
#define WUERFE 4

int muenzwurf() {
  int muenzwert = rand();
  return (muenzwert >= RAND_MAX /2)?(-1):(1);
}

void sim(unsigned int times) {
  int i, j;
  int pos;
  double *relwahr;
  assert(relwahr = (double*) calloc(2 * WUERFE + 1, sizeof(double)));
  printf("Simuliere Aufgabe 3.b) mit n = %d\n", times);

  // fuehre Versuch durch:
  for(i = 0; i < times; ++i) {
    pos = 0;

    for(j = 0; j < WUERFE; ++j)
      pos += muenzwurf();

    relwahr[pos + WUERFE] += 1.0 / (double)times;
  }
```

```
  printf("Die relativen Wahrscheinlichkeiten betragen:\n");
  printf("    (Position, Wahrscheinlichkeit)\n");

  for(i = 0; i < 2 * WUERFE + 1; i++)
    printf("    (%2d, %.3f)\n", i - WUERFE, relwahr[i]);

  printf("\n");
  free(relwahr);
  return;
}

int main() {
  // init Random number generator:
  srand(time(0));
  sim(100);
  sim(1000);
  return EXIT_SUCCESS;
}
```

...und die zugehörige Ausgabe:

```
Simuliere Aufgabe 3.b) mit n = 100
Die relativen Wahrscheinlichkeiten betragen:
    (Position, Wahrscheinlichkeit)
    (-4, 0.090)
    (-3, 0.000)
    (-2, 0.280)
    (-1, 0.000)
    ( 0, 0.390)
    ( 1, 0.000)
    ( 2, 0.200)
    ( 3, 0.000)
    ( 4, 0.040)

Simuliere Aufgabe 3.b) mit n = 1000
Die relativen Wahrscheinlichkeiten betragen:
    (Position, Wahrscheinlichkeit)
    (-4, 0.055)
    (-3, 0.000)
    (-2, 0.271)
    (-1, 0.000)
    ( 0, 0.367)
    ( 1, 0.000)
    ( 2, 0.244)
    ( 3, 0.000)
    ( 4, 0.063)
```

b) Wie man an der Ausgabe sehr schön sehen kann, nähern sich die realen Wahrscheinlichkeiten mit steigender Anzahl der Versuche den berechneten Werten an.

5. Nach Bayes berechne ich:

   $P(\{\text{Computer}\, C_1\}) = P(C_1) = 0.5$
   $P(\{\text{Computer}\, C_2\}) = P(C_2) = 0.5$
   $P(\{\text{Computer ist Fehlerhaft}\}) = P(F)$

$$\begin{aligned}
P(C1|F) &= \frac{P(F|C_1)\cdot P(C_1)}{P(F)} \\
&= \frac{P(F|C_1)\cdot P(C_1)}{P(F|C_1)\cdot P(C_1) + P(F|\overline{C_1})\cdot P(\overline{C_1})} \\
&= \frac{P(F|C_1)\cdot P(C_1)}{P(F|C_1)\cdot P(C_1) + P(F|C_2)\cdot P(C_2)} \\
&= \frac{P(F|C_1)}{P(F|C_1) + P(F|C_2)} \\
&= \frac{0.05}{0.05+0.02} = \frac{5}{7} \approx 0.714
\end{aligned}$$

   Die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig herausgegriffener Computer, der fehlerhaft ist, zur Sorte C_1 gehört, beträgt somit ca. 71%.

6. Ich gehe davon aus, daß mit "zufällig herausgegriffener Schüler" sowohl männliche als auch weibliche Schüler gemeint sind.

   $P(A) = 0.40\cdot 0.60 + 0.70\cdot(1-0.60) = 0.52$ $P(B) = 0.35\cdot 0.40 + 0.65\cdot(1-0.40) = 0.53$

   Die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig herausgegriffener Schüler aus Klasse A gute Leistungen bringt, liegt bei 52%. Bei Klasse B liegt sie bei 53%. Daraus folgt, daß die Klasse B besser als die Klasse A ist.