Stochastik

Serie 2

1. Wahrscheinlichkeitsraum mit $P(X) = 0$ und $P(Y) = 1$

   a) $P(A \cup X) = P(A)$

   $P(A \cup X) = P(A) + P(X) - P(A \cap X)$
   Da für die Menge $A \cap X$ $0 \leq P(A \cap X) \leq P(X)$ gilt,i folgt draus $P(A \cap X) = 0$. Somit gilt die Behauptung: $P(A \cup X) = P(A) + 0 - 0 = P(A)$.

   b) $P(A \cap Y) = P(A)$

   Für A gibt es zwei Möglichkeiten:
   - $P(A) = 0$ daraus folgt $A = \overline{Y}$
   - $P(A) > 0$. Daraus folgt, dass $A \subseteq Y$.

   Aus dem ersten Fall folgt die Behauptung direkt, da $\overline{Y} \cap Y = \emptyset$ und $P(\emptyset) = 0$. Im zweiten Fall kann man Y in zwei disjunkte Teilmengen aufteilen: $Y_1 = A$ und $Y_2 = Y \setminus A$. Daraus folgt die folgende Form der zu beweisenden Formel: $P(A \cap Y) = P((A \cap Y_1) \cup (A \cap Y_2))$. Daraus ergibt sich $= P(A \cap A \cup \emptyset) = P(A)$.

2. $P(A) = 1 - \epsilon$, $P(\overline{A}) = \epsilon$
   $P(B) = 1 - \delta$, $P(\overline{B}) = \delta$

   $\epsilon + \delta > 0.5$
   $P(A \cap B) > 0.5$

   Ich forme mittels DeMorgan um:
   $P(\overline{A} \cup \overline{B}) \leq 0.5$

   $P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \epsilon + \delta - P(\overline{A} \cap \overline{B})$

   Aus $0 \leq P(\overline{A} \cap \overline{B}) \leq 1$ und $\epsilon + \delta < 0.5$ folgt, daß $P(A \cup B) > 0.5$

3. a) Ich berechne die Wahrscheinlichkeitsdichte ...

   $$p(\cdot) : \mathbb{N} \to (R), p(n) = q(1-q)^{n-1}$$

   $$\begin{aligned} p(n) &= q\sum_{i=1}^{n}(1-q)^{i-1} \\ &= q\frac{1}{1-(1-q)} = 1 \end{aligned}$$

b) …und die Wahrscheinlichkeiten:

$P(\{1,2\})$:

$$p(2) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$P(\{1,2,3\})$:

$$p(2) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}(1 - 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

4. a) Wahrscheinlichkeitsraum: $\Omega = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

   b) Die Wahrscheinlichkeit beim ersten Veruch das richtige Ereignis zu bekommen ist 0.01. Für zwei Versuche ergibt sich $0.01 + 0.99 * 0.01$. Für drei Verusche ergibt sich $0.01 + 0.99 * 0.01 + 0.99^2 * 0.01$. Wie man spätestens jetzt erkennt ergibt das eine geometrische Reihe der folgenden Form:

$$\sum_{n=0}^{x} 0.01 * 0.99^n$$

   Unter Annahme einer endlichen Lösung kann man die Lösungsformel für endliche geometrische Reihen anwenden. Wenn man nach n auflöst kommt man zu folgendem Ergebnis:

$$n = \frac{\log 0.1}{\log 0.99} \approx 230$$

   Man braucht also ungefähr 230 Versuche.

5. Fall 1: Der erste setzt sich an den Rand:

$$P(\{\text{er setzt sich neben ihn}\}) = \frac{1}{9}$$

   Fall 2: Der erste setzt sich nicht an den Rand:

$$P(\{\text{der Zweite setzt sich in die gleiche Reihe}\}) = \frac{4}{9}$$

$$P(\{\text{er setzt sich neben den Ersten}\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

   Wahrscheinlichkeit für den ersten Fall: $\frac{2}{5}$
   Wahrscheinlichkeit für den zweiten Fall: $\frac{3}{5}$

$$P(\{\text{beide sitzen nebeneinander}\}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{9} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{45} \approx 0.178$$

Arne Brutschy
8964813

6. Ich gehe von ununterscheidbaren Würfeln ohne Reihenfolge aus. Es gibt 21 verschiedene Ergebnisse.

   a) Die Augensumme ist gleich acht:

   $$P = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

   b) Beide Augenzahlen sind verschieden:

   $$P = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$