UNIVERSITÄT LEIPZIG

Filtration und der Satz von Diego

Ausarbeitung zum Problemseminar "Modallogik" bei Prof. Steinacker

Arne Brutschy, 2. Juli 2006

Zusammenfassung

Diese Ausarbeitung beschäftigt sich mit dem Abschnitt "Canonical Models and Filtration" des Buches "Modal Logic" von den Autoren Alexander Chagrov und Michael Zakharyaschev. Dabei wird die Methode der Filtration, die zum Beweis der endlichen Approximierbarkeit von modalen bzw. intuitionistischen Logiken benutzt wird, vorgestellt und besprochen. Desweiteren wird der Satz von Diego erklärt, der als Grundlage für Filter von superintuitionistischen Logiken dient.

Einführung

Eine Schlüsselfrage bei der Untersuchung eines logischen System ist die Frage seiner Entscheidbarkeit, d.h. das Problem, ob es einen Algorithmus gibt, der nach einer endlichen Zahl von Teilschritten Antwort auf die Frage liefert, ob ein bestimmter Ausdruck Theorem des Systems ist oder nicht [2].

Da Entscheidbarkeit unmittelbar aus einer anderen Eigenschaft, der endlichen Approximierbarkeit, folgt, wird hier die Methode der Filtration vorgestellt. Diese eignet sich zum Nachweis der endlichen Approximierbarkeit von modalen bzw. intuitionistischen Logiken und löst damit eine zentrale Frage bei der Betrachtung von ganzen Klassen von Logiken.

Die Filtration ist eine Alternative zu kanonischen Modellen, die Aufgrund ihrer Größe und Komplexität kritisch sind. Zusätzlich kann die Kanonität einer Logik in manchen Fällen nicht bewiesen werden. Hier bietet die Filtration einen Weg um die endliche Approximierbarkeit nachzuweisen.

Grundbegriffe

Da die Autoren viele Referenzen auf vorausgegangene Kapitel, Lemmas und Sätze verwenden, werden hier zum besseren Verständnis die im Folgenden benötigten Grundbegriffe aufgeführt. Die Nummerierung wurde dabei, wie im gesamten Dokument, beibehalten, um einen einfachen Vergleich zu ermöglichen.

Es ist zu beachten, daß in diesem Abschnitt – da dieser nur zur schnellen Referenz dienen soll – keinerlei Beweise erbracht werden. Für eine umfassende Beschreibung der hier angegebenen Definitionen und Sätzen sollte das Original zu Rate gezogen werden.

Subφ ist die Menge aller Teilformeln von φ.
Varφ ist die Menge aller Variablen von φ.

Endlich Approximierbar Eine Logik L heißt *endlich approximierbar*[1], wenn für jedes $\varphi \in L$ ein endliches widerlegendes Modell existiert.

Lokale Tabularität Eine Logik L wird *lokal Tabular* genannt, wenn sie für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ nur eine endliche Menge von paarweise nichtäquivalenten Formeln, die aus den Variablen $p_1, \ldots, p_n$ besteht, enthält.

Hintikka-System Ein Hintikka-System ist ein Paar $\mathfrak{H} = \langle T, S \rangle$ bestehend aus einer nichtleeren Menge T von disjunkten Tableaus und einer partiellen Ordnung S auf T. Im intuitionistischen Fall erfüllt S dabei folgende Bedingungen:

HS$_I$1: Sei $t = (\Gamma, \Delta)$, $t' = (\Gamma', \Delta')$. Wenn $t, t‘ \in T$ und tSt' gilt, dann ist $\Gamma \subseteq \Gamma'$.
HS$_I$2: Sei $t = (\Gamma, \Delta)$. Wenn $t \in T$ und $\psi \rightarrow \chi \in \Delta$ gilt, dann gibt es ein $t' = (\Gamma', \Delta')$, $t' \in T$, so daß tSt' gilt sowie $\psi \in \Gamma'$ und $\chi \in \Delta$.

bzw. im modalen Fall:

HS$_M$1: Sei $t = (\Gamma, \Delta)$, $t' = (\Gamma', \Delta')$. Wenn $t, t‘ \in T$ und tSt' gilt, dann ist $\varphi \in \Gamma'$ für jedes $\Box\varphi \in \Gamma$.
HS$_M$2: Sei $t = (\Gamma, \Delta)$. Wenn $t \in T$ und $\Box\varphi \in \Delta$ gilt, dann gibt es ein $t' = (\Gamma', \Delta')$, $t' \in T$, so daß tSt' gilt sowie $\varphi \in \Delta'$.

L-Konsistenz Ein Tableau $t = (\Gamma, \Delta)$ der Logik L wird *L-konsistent* genannt, wenn es für kein $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ aus Δ gilt: $\Gamma \vdash_L \varphi_1, \ldots, \varphi_n$.
t wird *maximal L-konsistent* genannt, wenn $\Gamma \cup \Delta$ die Menge aller Formeln in L ist.

Kanonischer Rahmen Sei $\mathfrak{F}_L = \langle W_L, R_L \rangle$ ein Rahmen, wobei W_L die Menge aller L-konsistenten Tableaus ist. Gelte ferner für beliebige $t_1 = (\Gamma_1, \Delta_1)$ und $t_2 = (\Gamma_2, \Delta_2)$ aus W_L:

$$t_1 R_L t_2 \text{ gdw. } \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \text{ gdw. } \Delta_1 \supseteq \Delta_2, \text{ wenn } L \in \text{Ext}\mathbf{Int}$$

bzw.

$$t_1 R_L t_2 \text{ gdw. } \{\varphi : \Box\varphi \in \Gamma_1\} \subseteq \Gamma_2, \text{ wenn } L \in \text{NExt}\mathbf{K}$$

[1] auch: *Endliche-Modell-Eigenschaft* bzw. *finite model property* (fmt, engl.)

Der Rahmen $\mathfrak{F}_L$ wird *kanonischer Rahmen* von L genannt. Sei $\mathfrak{V}_L$ nun eine Bewertung für $\mathfrak{F}_L$ indem man für jede Variable p folgende Menge erzeugt:

$$\mathfrak{V}_L(p) = \{(\Gamma, \Delta) \in W_L : p \in \Gamma\}.$$

Das resultierende Modell $\mathfrak{M}_L = \langle \mathfrak{F}_L, \mathfrak{V}_L \rangle$ wird das *kanonische Modell* von L genannt.

Lemma 5.3 Der kanonische Rahmen $\mathfrak{F}_L$ ist ein Hintikka-System in **Int**, wenn $L \in \mathrm{Ext}\mathbf{Int}$ bzw. in **K**, wenn $L \in \mathrm{Ext}\mathbf{K}$.

Satz 5.4 (Kanonisches Modell) Sei L eine superintuitionistische oder normale modale Logik und $\mathfrak{M}_L = \langle \mathfrak{F}_L, \mathfrak{V}_L \rangle$ das zugehörige kanonische Modell mit dem Rahmen $\mathfrak{F}_L = \langle W_L, R_L \rangle$. Dann gilt für jede Formel φ und jedes Tableau $t = (\Gamma, \Delta)$ aus W_L:

- i) aus $\varphi \in \Gamma$ folgt $(\mathfrak{M}_L, t) \models \varphi$
- ii) aus $\varphi \in \Delta$ folgt $(\mathfrak{M}_L, t) \not\models \varphi$
- iii) und aus i) und ii) folgt $(\mathfrak{M}_L, t) \models \varphi$ gdw. $\varphi \in \Gamma$

Filtration

Das kanonische Modell $\mathfrak{M}_L$ zu einer konsistenten Logik L widerlegt alle Formeln, die nicht zu L gehören. Dieses Modell ist leider sehr groß und kompliziert. Wie die Beispiele von **Int** und **K** zeigen, kann alternativ auch ein endlicher Rahmen verwendet werden, um jede Formel, die nicht in L enthalten ist, von L zu separieren. Aus der endlichen Approximierbarkeit von L lässt sich direkt die Entscheidbarkeit ableiten.

Die Filtration dient dazu, solche Vollständigkeit nachzuweisen und ist auch in Fällen erfolgreich, in denen die Methode der kanonischen Modelle fehlschlägt.

Um die endliche Approximierbarkeit einer Logik L nachzuweisen, muß bewiesen werden, daß für jede Formel φ ein Rahmen $\mathfrak{F}$ existiert, der die Folgenden drei Bedingungen erfüllt:

- i) $\mathfrak{F} \not\models \varphi$,
- ii) $\mathfrak{F}$ ist endlich und
- iii) $\mathfrak{F} \models L$

Zu i): Aus Satz 5.5 folgt, daß jede Formel φ mittels dem kanonischen Rahmen $\mathfrak{F}_L$ widerlegt werden kann.

Zu ii): Um die geforderte Endlichkeit von $\mathfrak{F}$ zu erfüllen, müssen wir die Abschnitte 2.4 und 3.4 bemühen.
Da wir nur an den Wahrheitswerten von φ interessiert sind, können wir aus

allen betrachteten Tableaus alle Formeln herausstreichen, die keine Teilformeln von φ sind. Wir sagen daß zwei Tableaus t_1 und t_2 **Sub**φ-*äquivalent* sind, wenn genau alle dieser Teilformeln von φ in den Tableaus äquivalent sind ($\Gamma_1 \cap \mathbf{Sub}\varphi = \Gamma_2 \cap \mathbf{Sub}\varphi$). Da viele der Tableaus in W_L **Sub**φ-äquivalent sind, ergibt sich eine maximale Zahl von $2^{|\mathbf{Sub}\varphi|}$ paarweise nicht-äquivalenten Tableaus.
Mittels diesen Tableaus kann man nun ein Hintikka-System $\mathfrak{H} = \langle S, T\rangle$ definieren. Die Erreichbarkeitsrelation S muß dabei den jeweiligen Hintikka-Bedingungen ($\mathrm{HS}_I 1/2$ bzw. $\mathrm{HS}_M 1/2$) genügen. Die Relation wird dadurch allerdings nicht eindeutig festgelegt, daher ergibt sich ein gewisser Spielraum für S.

Zu iii): Um $\mathfrak{F} \models L$ zu erfüllen, kommt es auf die richtige Wahl von S und natürlich die Logik L an.

Im Folgenden wird nun gezeigt, wie man S wählt um iii) zu genügen, die endliche Approximierbarkeit nachweist und dies auf einige modale und superintuitionistische Logiken anwendet.

Sei $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, \mathfrak{V}\rangle$ ein Modell der Sprache $\mathcal{L}$ oder $\mathcal{ML}$ mit einem Rahmen $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$. Sei ferner Σ die Menge aller Formeln, abgeschlossen unter allen Teilformeln ($\mathbf{Sub}\varphi \subseteq \Sigma$ für alle $\varphi \in \Sigma$).

Zwei Punkte $x, y \in W$ sind Σ-*äquivalent* in $\mathfrak{M}$ wenn

$$(\mathfrak{M}, x) \models \varphi \text{ gdw. } (\mathfrak{M}, y) \models \varphi \text{ für alle } \varphi \in \Sigma.$$

Ist dies der Fall schreiben wir $x \sim_\Sigma y$, wobei $\sim_\Sigma$ eine Äquivalenzrelation ist. $[x]_\Sigma$ bezeichnet die Äquivalenzklasse von x, d.h. $[x]_\Sigma = \{y \in W : y \sim_\Sigma x\}$. Sollte die Grundmenge Σ klar sein, wird der Subskript Σ weggelassen und einfach $[x]$ bzw. $x \sim y$ geschrieben.

Filtration Eine *Filtration* von $\mathfrak{M}$ durch Σ ist jedes Modell $\mathfrak{N} = \langle \mathfrak{G}, \mathfrak{U}\rangle$, das auf einem Rahmen $\mathfrak{G} = \langle V, S\rangle$ basiert und für das gilt:

i) $V = \{[x] : x \in W\}$;
ii) $\mathfrak{U}(p) = \{[x] : x \in \mathfrak{V}(p)\}$, für jede Variable $p \in \Sigma$;
iii) $[x]S[y]$ gdw. $\exists x_0 \in [x]\ \exists y_0 \in [y] : xRy$;

sowie für eine modale Logik:
iv) wenn $[x]S[y]$, dann folgt $y \models \varphi$ aus $x \models \Box\varphi$, für $x, y \in W$ und $\Box\varphi \in \Sigma$,

bzw. für eine intuitionistische Logik:
iv') wenn $[x]S[y]$, dann folgt $y \models \varphi$ aus $x \models \varphi$, für $x, y \in W$ und $\varphi \in \Sigma$.

Satz 5.23 (Filtration) Sei Σ eine Menge von Formeln und $\mathfrak{N}$ eine Filtration eines Modells $\mathfrak{M}$ durch Σ. Dann gilt für jeden Punkt x aus $\mathfrak{M}$ und jede Formel $\varphi \in \Sigma$:

$$(\mathfrak{M}, x) \models \varphi \text{ gdw. } (\mathfrak{N}, [x]) \models \varphi.$$

Beweis Wir beweisen über eine Induktion über den Formelaufbau von ϖ, wobei die Induktionsverankerung bereits aus ii) folgt.

Wir zeigen den Induktionsschritt nur für den Möglichkeitsoperator, da die entsprechenden Schritte für $\wedge$, $\vee$ und $\rightarrow$ direkt aus ihren Definitionen folgen. Sei nun $\varphi = \Box\psi \in \Sigma$ und $x \models \varphi$. Um zu zeigen, daß $[x] \models \varphi$ gilt, müssen wir nachweisen daß für jeden Nachfolger $[y]$ von $[x]$ gilt: $[y] \models \psi$. Nehmen wir also an, $[y]$ sei ein direkter Nachfolger von $[x]$ mit $[x]S[y]$. Nach iv) folgt $[y] \models \psi$ und damit auch $y \models \psi$.

Sei nun $[x] \models \Box\psi$ und $y \in x\!\uparrow$ beliebig. Nach xRy und iii) gilt, daß $[y] \models \psi$ gdw. $y \models \psi$.

Der intuitionistische Fall wird analog bewiesen, indem man iv') statt iv) verwendet. $\square$

Wie bereits erwähnt wird S durch iii) und iv) (bzw. iv')) nicht eindeutig bestimmt; es bleibt ein Intervall $\underline{S} \subseteq S \subseteq \overline{S}$ in dem S gewählt werden kann. Dabei ist

$$\underline{S} = \{\langle [x], [y] \rangle : \exists x', y' \in W \; (x' \sim x \wedge y' \sim y \wedge x'Ry')\},$$

$$\overline{S} = \{\langle [x], [y] \rangle : \forall \Box\varphi \in \Sigma \; (x \models \Box\varphi \rightarrow y \models \varphi)\}$$

bzw. im intuitionistischen Fall

$$\overline{S} = \{\langle [x], [y] \rangle : \forall \varphi \in \Sigma \; (x \models \varphi \rightarrow y \models \varphi)\}.$$

Gilt nun $[x]S[y]$, dann auch nach iv) bzw. iv') $[x]\overline{S}[y]$. Gilt $[x][y]$, dann auch nach $x'Ry'$ für beliebige $x' \in [x]$, $y' \in [y]$ und folglich nach iii) $[x]\overline{S}[y]$. Das $\underline{S}$ iv) und $\overline{S}$ iii) erfüllt folgt direkt aus der Wahrheitsdefinition des modalen Modells.

Der zugehörige Rahmen $\underline{\mathfrak{G}} = \langle V, \underline{S} \rangle$ wird die *feinste* und $\overline{\mathfrak{G}} = \langle V, \overline{S} \rangle$ dementsprechend die *gröbste* Filtration genannt.

Dabei ist zu beachten, daß S aus dem oben angegebenen Intervall nicht zwingend transitiv ist – auch wenn die Urrelation R transitiv war. Dadurch lassen sich, insbesondere im intuitionistischen Fall, nicht mit jeder Relation zur Logik passende (und damit $\mathfrak{F} \models L$ genügende) Modelle erzeugen.

Um doch noch eine transitive Relation zu erhalten, können wir die transitive Hülle $\widehat{\underline{S}}$ von $\underline{S}$ bilden:

$$\widehat{\underline{S}} = \{\langle [x],[y]\rangle : \exists n > 0\ [x]\underline{S}^n[y]\}.$$

Dabei erfüllt $\widehat{\underline{S}}$ iii) und iv) und bildet eine partielle Ordnung.

Alternativ kann eine transitive Filtration $\mathfrak{N} = \langle \mathfrak{G}, \mathfrak{U}\rangle$ eines transitiven modalen Modells $\mathfrak{M}$ durch Σ mittels der sogenannten *Lemmon-Filtration* gebildet werden. Sei dafür x, y aus $\mathfrak{M}$ beliebig:

$$[x]S[y] \text{ gdw. } y \models \Box^+ \text{ gdw. } x \models \varphi,\ \text{für alle } \Box\varphi \in \Sigma.$$

Eine der wichtigsten Eigenschaften der Filtration ist, daß sie immer endlich ist, wenn ein endlicher Filter verwendet wurde. Sie kann sogar bei unendlichen Filtern endlich sein, und zwar wenn dieser endlich basiert ist.

Eine Menge Σ wird auf einem Modell $\mathfrak{M}$ *endlich basiert* genannt, wenn es eine endliche Menge von Formeln Δ gibt, so daß gilt:

$$\forall\psi \in \Sigma\ \exists\chi \in \Delta\ \mathfrak{M} \models \psi \leftrightarrow \chi$$

Die Menge Δ ist die *endliche Basis* von Σ auf $\mathfrak{M}$.

Satz 5.24 Sei $\mathfrak{N}$ eine Filtration eines Modells $\mathfrak{M}$ durch eine Menge Σ, welche auf $\mathfrak{M}$ endlich basiert. Sei ferner Δ die endliche Basis von Σ. Dann enthält $\mathfrak{N}$ höchstens $2^{|\Delta|}$ Punkte.

Beweis Zwei beliebige Punkte sind genau dann Σ-äquivalent, wenn sie Δ-äquivalent sind. Dadurch sind die Äquivalenzklassen gleichmächtig und es gilt daß die Menge von paarweise nicht-Σ-äquivalenten Punkten aus $\mathfrak{M}$ nicht größer als die Menge von Teilformeln von Δ, nämlich $2^{|\Delta|}$, sein kann. $\Box$

Als direkte Konsequenz aus den Sätzen 5.23 und 5.24 können wir nachfolgendes ableiten:

Folgerung 5.25 Sei $\mathfrak{M}$ ein widerlegendes Modell für φ und Σ eine Menge von Formeln, die auf $\mathfrak{M}$ endlich basiert und unter allen Teilformeln abgeschlossen ist. Dann ist jede Filtration von $\mathfrak{M}$ durch Σ ein endliches widerlegendes Modell für φ.

Um nun die endliche Approximierbarkeit bzw. die Endliche-Modell-Eigenschaft einer Logik L zu beweisen, reicht es aus zu zeigen daß für jede Formel φ, die nicht in L liegt, eine Filtration $\mathfrak{N}$ eines beliebigen Gegenmodells $\mathfrak{M}$ für φ existiert, und daß diese Filtration mittels einem über $\mathfrak{M}$ endlich basierten Filter Σ erzeugt wurde. Dabei muß $\Sigma\varphi$ enthalten und es muß gelten: $\mathfrak{N} \models L$. In diesem Fall sagen wir daß L *die Filtration erlaubt*.

Folgerung 5.26 Wenn eine Logik L Filtration erlaubt, ist sie endlich approximierbar.

Die Autoren machen hierzu noch folgende Anmerkungen:
1) Wenn ein Logik L in Bezug zu einer Klasse von Rahmen mit der Eigenschaft $\mathcal{P}$ korrekt ist, dann genügt es, um zu zeigen daß L die Filtration erlaubt, daß für jede Formel φ nicht aus L eine Filtration $\mathfrak{N} = \langle \mathfrak{G}, \mathfrak{U} \rangle$ des Gegenmodells $\mathfrak{G}$ existiert. Weiter muß $\mathfrak{N}$ mittels einem über $\mathfrak{M}$ endlich basierten Filter Σ gebildet worden sein, und der zugehörige Rahmen $\mathfrak{G}$ $\mathcal{P}$ genügen.
2) Es ergibt sich, daß wir für die Filtration des kanonischen Modells $\mathfrak{M}_L$ keine große Wahl haben:

Satz 5.27 Sei $\mathfrak{N} = \langle \mathfrak{G}, \mathfrak{U} \rangle$ ist eine Filtration des kanonischen Modells $\mathfrak{M}_L = \langle \mathfrak{F}_L, \mathfrak{V}_L \rangle$ durch Σ, so daß $\mathfrak{N} \models L$. Dann ist $\mathfrak{N}$ die feinste Filtration von $\mathfrak{M}$ durch Σ.

Beweis Sei $\mathfrak{G} = \langle V, S \rangle$. Um zu zeigen daß $S \subseteq \underline{S}$ gilt, müssen wir nachweisen, daß für beliebige $[x], [y] \in V$ mit $[x]S[y]$ zwei Punkte x', y' aus W_L existieren, und daß für diese $X'Ry'$ sowie $x' \sim x, y' \sim y$ gilt. Seien nun $t_x = (\Gamma_x, \Delta_x)$ und $t_y = (\Gamma_y, \Delta_y)$ zwei Tableaus, wobei

$$\Gamma_x = \{\varphi : (\mathfrak{N}, [x]) \models \varphi\}, \Delta_x = \{\varphi : (\mathfrak{N}, [x]) \not\models \varphi\},$$

$$\Gamma_y = \{\varphi : (\mathfrak{N}, [y]) \models \varphi\}, \Delta_y = \{\varphi : (\mathfrak{N}, [y]) \not\models \varphi\}.$$

Da nach Voraussetzung $\mathfrak{N} \models L$ gilt, sind beide Tableaus L-konsistent und gehören damit zu W_L. Da aber $[x]S[y]$ gilt, muß auch t_xRt_y gelten, und damit auch $S \subseteq \underline{S}$. □

Abschließend können wir nun mit der in diesem Abschnitt eingeführten Technik der Filtration die endliche Approximierbarkeit einer ganzen Reihe von modalen und intuitionistischen Logiken zeigen. Dazu stellen sie noch folgenden Satz auf, dessen Beweis sie uns allerdings schuldig bleiben:

Satz 5.28 Wenn eine normale modale oder superintuitionistische Logik L durch einen Rahmen charakterisiert wird, der eine Beschränkung erfüllt, die durch eine positive Formel erster Stufe über R und $=$ ausgedrückt werden kann, dann erlaubt L Filtration und ist somit endlich approximierbar.

In den Sätzen und Folgerungen 5.29 − 5.36 weisen die Autoren mittels der oben bewiesenen Lemmata nach, daß jeweils ganze Klassen von Logiken, die durch eine bestimme Rahmeneigenschaft charakterisiert werden, Filtration erlauben. Dadurch sind sie endlich approximierbar und somit entscheidbar. In der nachfolgenden Tabelle werden die im Buch besprochenden Logiken aufgeführt, auf die Beweise im Einzelnen wird allerdings verzichtet. Sie können bei Interesse über die Referenz in der Tabelle im Original nachgeschlagen werden.

Exemplarisch wird hier nur nochmal der Beweis für symmetrische Rahmen angeführt.

Beweis Sei $\mathfrak{N} = \langle \mathfrak{G}, \mathfrak{U} \rangle$ die feinste Filtration eines Modells $\mathfrak{M}$ mit einem symmetrischen Rahmen $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$. Gelte ferner $[x]S[y]$ für beliebige Punkte $[x], [y]$ aus $\mathfrak{G}$. Dann gilt nach der Definition von S, daß zwei Punkte $x' \in [x]$ und $y' \in [y]$ existieren, und $x'Ry'$ gilt. da der Rahmen $\mathfrak{F}$ symmetrisch ist, gilt aber auch $y'Rx'$ und daher nach iii) trivialer Weise auch $[y]S[x]$. $\square$

Logik(en)	Rahmeneigenschaft	Satz
D, **T**, **S5**	symmetrisch	5.29, 5.30
KB	symmetrisch	5.31
K4, **D4**, **S4**	transitiv bzw. Halbordnung	5.32
K4.2, **K4.3**, **S4.2**, **S4.3**, **KC**, **LC**	transitiv und gerichtet	5.33
K4.1, **S4.1**	transitiv und McKinsey-Bedingung	5.34

Der Satz von Diego

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, daß größere Filter mehr Eigenschaften vom Ausgangsmodell an die Filtration vererben. Je mehr Eigenschaften vererbt werden, desto wahrscheinlicher ist die resultierende Filtration ein Modell für die betreffende Logik. Der Satz von Diego wird genau dafür verwendet: man kann mit seiner Hilfe zeigen, daß der Abschluß von jeder endlichen Menge von intuitionistischen Formeln unter $\wedge, \rightarrow$ und $\perp$ (bzw. $\neg$) auf einem beliebigen intuitionistischen Modell endlich basiert.

Damit kann dieses Modell als Filter verwendet werden, um die endliche Approximierbarkeit und damit die Entscheidbarkeit von superintuitionistischen Logiken zu zeigen.

Satz 5.37 (Diego) Für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ enthält die Menge von Formeln Ξ_n, die aus den Variablen $p_1, \ldots, p_n$ sowie $\wedge, \rightarrow$ und $\perp$ konstruiert wurde, nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente **Int**-Formeln.

Um den Satz von Diego beweisen zu können, muss erst eine Reihe von Lemmata bewiesen werden. Im Folgenden werden also verschiedene Definitionen etabliert und die Lemmata 5.38 bis 5.42 bewiesen, mit deren Hilfe wir letztendlich den eigentlichen Beweis führen können.

Wir beginnen mit der breitesten Filtration $\mathfrak{M}_L = \langle \mathfrak{F}_L, \mathfrak{V}_L \rangle$ des kanonischen Modells für **Int**, die durch den Filter Ξ_n erzeugt wurde. Wir betrachten dabei Punkte aus dem kanonischen Rahmen $\mathfrak{F}_L = \langle W_L, R_L \rangle$ als Tableau $t = (\Gamma, \Delta)$, so daß

$$\Gamma = \{\varphi \in \Xi_n : (\mathfrak{M}_L, t) \models \varphi\}, \quad \Delta = \{\varphi \in \Xi_n : (\mathfrak{M}_L, t) \not\models \varphi\}.$$

Ein solches Tableau t wird *p-prim* bzgl. Ξ_n genannt, wenn für jedes atomare $p \in \Xi_n$ gilt: wenn $p \in \Delta$, dann gelte für jedes $\varphi \in \Xi_n$ entweder $\varphi \in \Gamma$ oder $\varphi \to p \in \Gamma$ (und damit $\varphi \in \Delta$).

Lemma 5.38 Für alle atomare $p \in \Xi_n$, alle $t = (\Gamma, \Delta) \in W_L$ und alle $\varphi \in \Xi_n$ gilt: wenn $\varphi \to p \in \Delta$, dann existiert ein p-primer Nachfolger $t^* = (\Gamma^*, \Delta^*)$ von t so daß $\varphi \in \Gamma^*$.

Beweis Da $\mathfrak{F}_L$ ein Hintikka-System ist, gilt nach $\mathrm{HS}_I 2$: da $\varphi \to p \in \Delta$, existiert ein Punkt $t_1 = (\Gamma_1, \Delta_1)$ der von t aus erreichbar ist ($tR_L t_1$), so daß $\varphi \in \Gamma_1$ und $p \in \Delta_1$.

Sei X nun eine maximale Kette von Punkten in $\mathfrak{F}_L$, die p widerlegen, so daß $t_1 \in X$. Konstruieren wir nun ein Tableau $t^* = (\Gamma^*, \Delta^*)$ mit $\Gamma^* = \bigcup_{(\Gamma', \Delta') \in X} \Gamma'$ und $\Delta^* = \Xi_n \setminus \Gamma^*$.

Das so konstruierte Tableau t^* ist **Int**-konsistent. Wäre das nicht so, gäbe es nach der Definition der L-Konsistenz $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \leftrightarrow \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_l \in \mathbf{Int}$ für $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ aus Γ^* und $\psi_1, \ldots, \psi_l$ aus Δ^*. Wäre das der Fall, gäbe es aber einen Vorgänger $t' = (\Gamma', \Delta')$ von t^*, der in X liegt und damit **Int**-konsistent ist. Dies widerspricht aber der durch die partielle Ordnung auf X und $\mathrm{HS}_I 1$ induzierte Forderung, daß $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \Gamma'$ und $\psi_1, \ldots, \psi_l \in \Delta'$.

t^* ist also **Int**-konsistent, und damit auch ein Punkt aus $\mathfrak{F}_L$. Durch die echte Teilmengenbeziehung ist t^* sogar der letzte Punkt von X. Es gilt nach der Wahrheitsdefinition für intuitionistische Formeln $\varphi \in \Gamma^*$ und ferner $tR_L t^*$, da R_L eine partielle Ordnung und damit transitiv ist.

Wir zeigen abschliessend über einen indirekten Beweis, daß t^* p-prim ist: Nach Definition ist $p \in \Delta^*$. Wäre t^* nun nicht p-prim, müssten ψ und $\psi \leftrightarrow p$ beide in Δ^* sein. Dann müsste es aber einen Nachfolger t' von t^* geben, so daß $t' \models \psi$ und $t' \not\models p$. Dieser würde dann aber in X hinter t^* liegen, was im Widerspruch zur Maximalität von t^* steht. Daraus folgt, daß kein solches t' existieren kann und damit t^* p-prim ist. □

Sei V nun die Menge aller p-primen Tableaus in W_L für alle atomaren $p \in \Xi_n$, S die Einschränkung von R_L auf V und $\mathfrak{G} = \langle V, S \rangle$.

Lemma 5.39 Für jedes $t = (\Gamma, \Delta) \in W_L$ und jedes $\varphi \in \Delta$ existiert ein Tableau $t^* = (\Gamma^*, \Delta^*)$ in V, so daß $tR_L t^*$ und $\varphi \in \Delta^*$ gelten.

Beweis Da in **Int** folgende Äquivalenzen gelten:

$$p \leftrightarrow ((\bot \to \bot) \to p)$$
$$(p \to (q \to r)) \leftrightarrow (p \wedge q \to r)$$
$$(p \to q \wedge r) \leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$$

kann man jede Formel φ in der Form $\bigwedge_i(\psi_i \to p_i)$ ausdrücken. Damit $\varphi \in \Delta$ gilt, muß also mindestens ein $\psi_i \to p_i \in \Delta$ sein. Nach Lemma 5.38 existiert dann aber ein p-primes Tableau t^*, daß von t erreichbar ist und für das $\psi_i \in \Gamma^*$ gilt. Wenn aber $\psi_i \in \Gamma^*$ und $p_i \in \Delta^*$ ist, dann auch $\psi_i \to p_i \in \Delta^*$ und damit auch $\varphi \in \Delta^*$. □

Als Konsequenz daraus ergibt sich, daß $\mathfrak{G} = \langle V, S \rangle$ nach den Bedingungen $\mathrm{HS}_I 1$ und $\mathrm{HS}_I 2$ ein Hintikka-System ist, welches Ξ_n insofern charakterisiert, daß für jedes beliebige $\varphi \in \Xi_n$ gilt:

$$\varphi \in \mathbf{Int} \text{ gdw. } \varphi \in \Gamma$$

für alle Tableaus $t = (\Gamma, \Delta) \in V$.

Lemma 5.40 Wenn $t = (\Gamma, \Delta)$ p-prim und $t' = (\Gamma', \Delta')$ ein echter Nachfolger von t in $\mathfrak{G}$ ist, dann gilt $p \in \Gamma'$.

Beweis Es gilt $t \neq t'$ und tSt'. Daraus folgt, daß mindestens ein $\varphi \in \Gamma' \setminus \Gamma$ existiert. Da t p-prim ist, gilt $\varphi \to p \in \Gamma$, d.h. $\varphi \in \Delta$ und $\varphi \in \Gamma'$. Da $\mathfrak{G}$ ein Hintikka-System ist, folgt aus $\Gamma \subseteq \Gamma'$ wiederum, daß $\varphi \to p \in \Gamma'$ gilt – und daraus folgt $p \in \Gamma'$. □

Sei nun t ein p-primes Tableau aus $\mathfrak{G}$, $p_n \neq p$ und $p_n \in \Gamma$. Bildet man nun ein Tableau $t' = (\Gamma', \Delta')$ mittels

$$\Gamma' = \{\varphi \in \Gamma : p_n \notin \mathbf{Sub}\varphi\} \text{ und } \Delta' = \{\varphi \in \Delta : p_n \notin \mathbf{Sub}\varphi\},$$

ist t' p-prim bzgl. Ξ_{n-1}. Es ergibt sich, daß t durch t' und p_n eindeutig bestimmt ist:

Lemma 5.41 $\Gamma = \{\varphi \in \Xi_n : \Gamma', p_n \models_{\mathbf{Int}} \varphi\}$.

Beweis Es genügt zu zeigen, daß $\Gamma', p_n \models_{\mathbf{Int}} \varphi$ für jedes $\varphi \in \Gamma$. Sei also $\varphi \in \Gamma$ beliebig und $\varphi' = \varphi\{\top/p_n\}$. Nach dem strengen Vollständigkeitssatz für **Int** (Satz 2.45) gilt $p_n \models_{\mathbf{Int}} \varphi' \leftrightarrow \varphi$. Daraus folgt daß $\varphi' \in \Gamma$, somit auch $\varphi \in \Gamma'$ und dadurch $\Gamma', p_n \models_{\mathbf{Int}} \varphi$. □

Unter Verwendung der oben bewiesenen Lemmata können wir nun die zentrale Vorraussetzung, die für den Satz von Diego benötigt wird, beweisen:

Lemma 5.42 $\mathfrak{G}$ ist endlich.

Beweis Wir beweisen wie gewohnt über eine Induktion über die Anzahl von Variablen n im Filter Ξ_n.

Für $n = 0$ enthält φ keine Variable. Nach Folgerung 2.27 ist eine Variablenfreie Formel $\varphi \in \mathbf{Int}$ gdw. $\varphi \in \mathbf{Cl}$. **Cl** hat einen Punkt, d.h. $\mathfrak{G}$ ist endlich.

Angenommen $n > 0$. Nach Lemma 2.41 und der Induktion gibt es nur endlich viele Tableaus $t = (\Gamma, \Delta)$ in $\mathfrak{G}$, so daß $p \in \Gamma$ für ein beliebiges $p \in \Xi_n$ gilt. Es genügt zu zeigen, daß die Menge von Tableaus aus $\mathfrak{G}$, die alle $p_1, \ldots, p_n$ in Δ enthalten, endlich ist. Nach Lemma 5.40 hat jedes solcher Tableaus t keine Vorgänger in $\mathfrak{G}$. Da alle p_i in Δ sind, wird nach dem Generierunssatz t durch die Menge seiner echten Nachfolger aus $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt. Da es von diesen Nachfolgermengen nur endlich viele gibt, existieren also auch nur endlich viele verschiedene $t = (\Gamma, \Delta)$ mit $p_1, \ldots, p_n \in \Delta$. □

Beweis Wir können nun abschließend den Satz von Diego beweisen. Da $\mathfrak{G}$ die Menge Ξ_n charakterisiert, gilt für beliebige $\varphi, \psi \in \Xi_n$:

$$\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{Int} \quad \text{gdw. für alle } t = (\Gamma, \Delta) \text{ aus } \mathfrak{G} \\ \varphi \text{ und } \psi \text{ gleichzeitig entweder zu } \Gamma \text{ oder } \Delta \text{ gehören.}$$

Damit ist die Zahl der paarweise nicht-äquivalenten disjunktionsfreien Formeln die mittels $\bot, p_1, \ldots, p_n$ gebildet werden, nicht größer als die Anzahl der Teilmengen von V. Dies ist $2^{|V|}$ und damit endlich. □

Wie man leicht sieht, formuliert der Satz von Diego eine ähnliche Eigenschaft von intuitionistischen Logiken wie die lokale Tabularität von Cl-Logiken. Das fehlen der Abgeschlossenheit über die Disjunktion weist dabei auf die Problematik dieser bei Int-Logiken hin.

Als direkte Konsequenz des Satzes von Diego erhält man außerdem noch:

Folgerung 5.43 Sei Σ eine Menge von **Int**-Formeln. Der Abschluß von Σ über $\wedge, \rightarrow$ und $\perp$ enthält endlich viele paarweise nicht-äquivalente **Int**-Formeln und ist somit über jedem intuitionistischem Modell endlich basiert.

Mittels Folgerung 5.43 kann man die endliche Approximierbarkeit der Kreisel-Putnam Logik **KP** oder einigen anderen, sogar unendlichen si-Logiken nachweisen.

Literatur

[1] A. Chagrov, M. Zakharyaschev: *Modal Logic*, Nummer 35 der Oxford Logic Guides, Oxford University Press (1997).

[2] L. Kreiser, S. Gottwald, W. Stelzner: *Nichtklassische Logik: Eine Einführung*, Zweite Ausgabe, Akademie-Verlag Berlin (1990).

[3] P. H. Schmitt: *Nichtklassische Logiken*, Skript zur Vorlesung, Universität Karlsruhe (2004).