Gruppe 1
Freitag 13:15-14:45, B-Woche
(Dr. B. Schulze)

Claudia Heinich, 8966108
Sven Pohl, 8968075
Arne Brutschy, 8964813

Numerik

Serie 8

1. Das Ergebnis der Matrixmultiplikation $A = L \cdot R$ ist:

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 & & & \\ l_2 r_1 & l_2 s_1 + r_2 & s_2 & & \\ & l_3 r_2 & l_3 s_2 + r_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & s_{n-1} \\ & & & l_n r_{n-1} & l_n s_{n-1} \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich für:

$$\begin{aligned} r_1 &= d_1 \\ \\ s_1 &= e_1 \\ l_2 &= \frac{c_2}{r_1} \\ r_2 &= d_2 - l_2 s_1 \\ \\ &\vdots \\ \\ s_{n-1} &= e_{n-1} \\ l_n &= \frac{c_n}{r_{n-1}} \\ r_n &= d_n - l_n s_{n-1} \end{aligned}$$

Der Algorithmus berechnet also für ein bestimmtes n:

i	Werte	Anzahl der Operationen
1	$r_1 = d_1$	0
2	$s_1 = e_1$	0
	$l_2 = \frac{c_2}{r_1}$	1
	$r_2 = d_2 - l_2 s_1$	2
	$\vdots$	
n	$l_n = \frac{c_n}{r_{n-1}}$	1
	$r_n = d_n - l_n s_{n-1}$	2

Wie man deutlich sieht, benötigt der Algorithmus für jeden Schritt (außer für den ersten) drei Operationen.

Somit ist die gesamte Anzahl von Operationen $3(n-1)$.

Claudia Heinich, 8966108
Sven Pohl, 8968075
Arne Brutschy, 8964813

2. a) Hier nun die Ergebnisse unseres Algorithmus:

n	ohne Spaltenpivotsuche	mit Spaltenpivotsuche	Differenz
1	1.000000000	1.000000000	0.000000000
1	1.000000000	1.000000000	0.000000000
2	1.000000000	1.000000000	0.000000000
1	1.000000000	1.000000000	-0.000000000
2	1.000000000	1.000000000	0.000000000
3	1.000000000	1.000000000	-0.000000000
1	1.000000000	1.000000000	-0.000000000
2	1.000000000	1.000000000	0.000000000
3	1.000000000	1.000000000	-0.000000000
4	1.000000000	1.000000000	0.000000000
1	1.000000000	1.000000000	-0.000000000
2	1.000000000	1.000000000	0.000000000
3	1.000000000	1.000000000	-0.000000000
4	1.000000000	1.000000000	0.000000000
5	1.000000000	1.000000000	-0.000000000
1	1.000000000	1.000000000	-0.000000000
2	1.000000000	1.000000000	0.000000000
3	1.000000000	1.000000000	-0.000000000
4	1.000000000	1.000000000	0.000000000
5	1.000000000	1.000000000	-0.000000000
6	1.000000000	1.000000000	0.000000000
1	1.000000000	1.000000000	-0.000000000
2	1.000000000	1.000000000	0.000000000
3	0.999999998	0.999999998	-0.000000000
4	1.000000007	1.000000007	0.000000000
5	0.999999988	0.999999988	-0.000000000
6	1.000000011	1.000000010	0.000000000
7	0.999999997	0.999999997	-0.000000000
1	1.000000000	1.000000000	0.000000000
2	1.000000002	1.000000003	-0.000000000
3	0.999999969	0.999999967	0.000000002
4	1.000000170	1.000000181	-0.000000011
5	0.999999543	0.999999514	0.000000029
6	1.000000646	1.000000688	-0.000000041
7	0.999999540	0.999999511	0.000000030
8	1.000000130	1.000000138	-0.000000008
1	1.000000000	1.000000000	-0.000000000
2	1.000000022	1.000000019	0.000000003
3	0.999999621	0.999999672	-0.000000052
4	1.000002705	1.000002335	0.000000370
5	0.999990087	0.999991444	-0.000001357
6	1.000020230	1.000017455	0.000002774
7	0.999976777	0.999979967	-0.000003190
8	1.000014022	1.000012094	0.000001928
9	0.999996536	0.999997013	-0.000000477

Claudia Heinich, 8966108
Sven Pohl, 8968075
Arne Brutschy, 8964813

n	ohne Spaltenpivotsuche	mit Spaltenpivotsuche	Differenz
1	0.999999999	0.999999999	-0.000000000
2	1.000000093	1.000000089	0.000000003
3	0.999998031	0.999998107	-0.000000075
4	1.000017858	1.000017141	0.000000717
5	0.999914970	0.999918512	-0.000003542
6	1.000233430	1.000223403	0.000010027
7	0.999617433	0.999634292	-0.000016859
8	1.000369372	1.000352736	0.000016636
9	0.999806231	0.999815123	-0.000008892
10	1.000042585	1.000040599	0.000001986
1	0.999999994	0.999999994	0.000000000
2	1.000000600	1.000000625	-0.000000026
3	0.999984444	0.999983794	0.000000650
4	1.000174011	1.000181090	-0.000007079
5	0.998962629	0.998921463	0.000041166
6	1.003650003	1.003791551	-0.000141548
7	0.992046643	0.991744694	0.000301949
8	1.010850784	1.011254743	-0.000403959
9	0.990980377	0.990650604	0.000329773
10	1.004175943	1.004326094	-0.000150151
11	0.999174569	0.999145345	0.000029224
1	0.999999998	0.999999998	0.000000000
2	1.000000233	1.000000236	-0.000000003
3	0.999993296	0.999993174	0.000000122
4	1.000085449	1.000087544	-0.000002096
5	0.999403915	0.999385534	0.000018381
6	1.002523528	1.002616730	-0.000093202
7	0.993162491	0.992870483	0.000292007
8	1.012118995	1.012701973	-0.000582979
9	0.986015625	0.985272914	0.000742711
10	1.010120410	1.010704650	-0.000584239
11	0.995829612	0.995571136	0.000258476
12	1.000746449	1.000795628	-0.000049179
1	0.999999905	0.999999972	-0.000000067
2	1.000014549	1.000004227	0.000010322
3	0.999447312	0.999839385	-0.000392073
4	1.009113076	1.002656800	0.006456275
5	0.918705737	0.976190905	-0.057485169
6	1.438954581	1.129224641	0.309729939
7	-0.526566913	0.548193553	-1.074760467
8	4.532002529	2.050841631	2.481160898
9	-4.492036819	-0.642277821	-3.849758998
10	6.671034126	2.703980521	3.967053604
11	-2.728565248	-0.125422482	-2.603142766
12	2.412598411	1.428198176	0.984400235
13	0.765298674	0.928570463	-0.163271788

Claudia Heinich, 8966108
Sven Pohl, 8968075
Arne Brutschy, 8964813

n	ohne Spaltenpivotsuche	mit Spaltenpivotsuche	Differenz
1	1.000000048	0.999999984	0.000000063
2	0.999991786	0.999999776	-0.000007990
3	1.000347233	1.000108876	0.000238357
4	0.993642977	0.996428175	-0.002785197
5	1.063189156	1.049734072	0.013455084
6	0.616680137	0.617625711	-0.000945574
7	2.517117624	2.818146467	-0.301028843
8	-3.069831158	-4.669664385	1.599833227
9	8.536213232	12.936353525	-4.400140293
10	-8.643077303	-16.091280307	7.448203004
11	9.373552877	17.411274022	-8.037721146
12	-3.710689117	-9.115392701	5.404703584
13	2.548831025	4.617201023	-2.068369999
14	0.774031489	0.429465690	0.344565800
1	1.000000013	0.999999973	0.000000040
2	0.999995277	1.000001015	-0.000005738
3	1.000280080	1.000079703	0.000200377
4	0.993652868	0.996638599	-0.002985732
5	1.073306983	1.050046791	0.023260191
6	0.503749154	0.605865803	-0.102116650
7	3.124282647	2.882874584	0.241408063
8	-4.983771925	-4.821223003	-0.162548922
9	12.236498759	12.991293110	-0.754794351
10	-12.841984428	-15.505501559	2.663517130
11	11.449447288	15.781535233	-4.332087945
12	-2.754083687	-6.949773931	4.195690244
13	0.513929278	2.986640365	-2.472711087
14	1.919395289	1.097975408	0.821419881
15	0.765302327	0.883547814	-0.118245487
1	0.999999951	1.000000051	-0.000000100
2	1.000006714	0.999990578	0.000016136
3	0.999776399	1.000417053	-0.000640654
4	1.003107592	0.992119190	0.010988402
5	0.978163664	1.079665984	-0.101502321
6	1.082857890	0.517340486	0.565517404
7	0.827900429	2.859980174	-2.032079745
8	1.283836966	-3.664378961	4.948215927
9	-0.200146826	8.480147515	-8.680294341
10	6.372090188	-5.887608673	12.259698861
11	-13.359847193	2.694641660	-16.054488853
12	24.497168030	4.842514916	19.654653114
13	-23.232469206	-4.006307128	-19.226162078
14	16.467186192	3.717964565	12.749221627
15	-4.602577606	0.319110779	-4.921688385
16	1.882946850	1.054401763	0.828545087

Claudia Heinich, 8966108
Sven Pohl, 8968075
Arne Brutschy, 8964813

n	ohne Spaltenpivotsuche	mit Spaltenpivotsuche	Differenz
1	0.999999882	1.000000005	-0.000000124
2	1.000016511	0.999996976	0.000019535
3	0.999440954	1.000203829	-0.000762876
4	1.007874574	0.994990430	0.012884143
5	0.944863306	1.061820495	-0.116957189
6	1.192103891	0.556083119	0.636020772
7	0.807513456	3.003236763	-2.195723307
8	0.072794132	-4.894604360	4.967398492
9	4.761232492	12.361122721	-7.599890229
10	-4.064700254	-12.809236166	8.744535913
11	0.036239228	10.223379034	-10.187139806
12	13.460954426	-0.607238168	14.068192593
13	-16.738482505	0.072772782	-16.811255287
14	12.604216335	-0.825253685	13.429470020
15	-1.940387327	4.411416569	-6.351803896
16	0.586299146	-0.943951166	1.530250312
17	1.270021845	1.395260834	-0.125238989
1	0.999995272	0.999999689	-0.000004417
2	1.000541124	1.000038199	0.000502925
3	0.986937682	0.998920463	-0.011982782
4	1.080959848	1.011302946	0.069656902
5	1.564266784	0.960332552	0.603934232
6	-9.102226428	0.881225335	-9.983451763
7	57.609365731	2.437052738	55.172312992
8	-154.214104054	-3.627987064	-150.586116990
9	177.849118847	6.068996578	171.780122269
10	129.932718426	7.541894730	122.390823696
11	-646.007374891	-24.358013163	-621.649361728
12	757.547097246	29.923356297	727.623740949
13	-388.714960766	-19.384910041	-369.330050725
14	398.323284261	35.528791183	362.794493078
15	-931.806276049	-64.360463808	-867.445812241
16	1062.802511993	66.009426277	996.793085716
17	-555.858778246	-30.847769833	-525.011008413
18	114.006936023	7.217807550	106.789128473

Claudia Heinich, 8966108
Sven Pohl, 8968075
Arne Brutschy, 8964813

n	ohne Spaltenpivotsuche	mit Spaltenpivotsuche	Differenz
1	1.000000277	1.000000021	0.000000256
2	0.999937212	0.999994552	-0.000057339
3	1.003281961	1.000293338	0.002988624
4	0.928388758	0.993754930	-0.065366172
5	1.823786322	1.067756360	0.756029963
6	-4.609991091	0.576673082	-5.186664173
7	24.974167247	2.616548204	22.357619043
8	-64.470786811	-2.849355788	-61.621431024
9	112.262619346	6.691310751	105.571308595
10	-103.864411457	-4.507217304	-99.357194153
11	35.423895014	6.701172768	28.722722246
12	-1.339027642	-8.721117216	7.382089574
13	74.069015747	14.305901334	59.763114413
14	-108.542261519	-10.008400330	-98.533861189
15	-10.784614281	9.445501489	-20.230115771
16	157.141757663	-9.620691972	166.762449636
17	-155.430521399	11.844463535	-167.274984933
18	68.915186816	-4.723929711	73.639116527
19	-10.500421951	2.187342066	-12.687764017
1	1.000000128	0.999999815	0.000000313
2	0.999976662	1.000025722	-0.000049060
3	1.001060501	0.999146343	0.001914158
4	0.978981579	1.011420800	-0.032439221
5	1.226279346	0.929760992	0.296518354
6	-0.475514044	1.152446199	-1.627960242
7	7.156343615	1.480338582	5.676005033
8	-15.718363417	-2.864278581	-12.854084837
9	29.795664395	11.030010769	18.765653626
10	-26.976471749	-10.157479911	-16.818991838
11	9.271506277	0.905487037	8.366019241
12	8.127716483	12.293345677	-4.165629194
13	6.083289521	-5.077656354	11.160945875
14	-20.444058884	0.428954027	-20.873012912
15	5.883461034	-6.077765582	11.961226616
16	29.345711177	5.734800570	23.610910607
17	-35.789650091	19.864128381	-55.653778472
18	21.312217859	-29.583672016	50.895889875
19	-4.257599645	18.620614247	-22.878213892
20	1.479449237	-2.689626825	4.169076061

An den Ergebnissen kann man deutlich sehen wie sehr das Verfahren durch sie Spaltenpivotsuche verbessert wird. Gerade bei großen Matrizen treten hohe Fehler auf.

Claudia Heinich, 8966108
Sven Pohl, 8968075
Arne Brutschy, 8964813

b) Hier unser Quellcode zur Aufgabe. Es ist zu beachten das das Programm alles gleich im LaTeX-Syntax ausgibt...

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <string.h>



typedef struct {
  double A[20][20];
  double b[20];
  double x[20];
  int n;
} gleichung_t;



void ausgabe_ergebnis(gleichung_t *gl_ohne, gleichung_t *gl_mit) {
  int i;

  for (i= 0; i < gl_ohne->n; i++) {
    printf("          %2d & %3.9f & %3.9f & %3.9f \\\\\n", i + 1,
      gl_ohne->x[i], gl_mit->x[i], gl_ohne->x[i] - gl_mit->x[i]);
  }
  printf("          \\hline \n");
  return;
}


void hilbert(gleichung_t *gl) {
  int i, j;

  for (i= 0; i < gl->n; i++) {
    gl->b[i]= 0;

    for (j= 0; j < gl->n; j++) {
      gl->A[i][j]= 1 / (double)(i + j + 2 - 1);
      gl->b[i]+= gl->A[i][j];
    }
  }

  return;
}


void zeilentausch(gleichung_t *gl, int a, int b) {
  double tmp;
  int i;
```

Claudia Heinich, 8966108
Sven Pohl, 8968075
Arne Brutschy, 8964813

```
  if (a == b) return;

  for (i= 0; i < gl->n; i++) {
    tmp= gl->A[a][i];
    gl->A[a][i]= gl->A[b][i];
    gl->A[b][i]= tmp;
  }

  tmp= gl->b[a];
  gl->b[a]= gl->b[b];
  gl->b[b]= tmp;

  return;
}


void gauss(gleichung_t *gl, int sppivot) {
  int i, j, k;
  double l;

  for (i= 0; i < gl->n-1; i++) {
    // suche pivotelement
    j= i;
    // mit Spaltenpivotsuche
    if (sppivot) {
      for (k= i + 1; k < gl-> n; k++)
        if (gl->A[k][i] > gl->A[j][i])
          j= k;
    // ohne
    } else {
      while (gl->A[j][i] == 0 && j < gl->n) j++;
    }

    if (gl->A[j][i] == 0) {
      printf("Matrix ist singulaer!\n");
      return;
    }
    zeilentausch(gl, i, j);

    // jede Zeile
    for (k= i + 1; k < gl->n; k++) {
      // faktor berechnen
      l= gl->A[k][i]/gl->A[i][i];

      // Zeile multiplizieren
      for (j= i; j < gl->n; j++)
        gl->A[k][j]= gl->A[k][j] - l * gl->A[i][j];
```

Claudia Heinich, 8966108
Sven Pohl, 8968075
Arne Brutschy, 8964813

```
      gl->b[k]= gl->b[k] - l * gl->b[i];
    }
  }

  // errechne ergebnis
  for (i= gl->n-1; i >= 0; i--) {
    // errechne Wert fuer diese Zeile
    gl->x[i]= gl->b[i];
    for (j= i+1; j < gl->n; j++) {
      gl->x[i]-= gl->A[i][j];
    }
    gl->x[i]= gl->x[i]/gl->A[i][i];

    // setze Wert in alle weiteren Zeilen ein
    for (j= i+1; j >= 0; j--)
      gl->A[j][i]= gl->A[j][i] * gl->x[i];
  }
  return;
}

int main() {
  gleichung_t gl_ohne;
  gleichung_t gl_mit;


  for (gl_ohne.n= 1; gl_ohne.n < 21; gl_ohne.n++) {
    // erstelle Hilbert-Matrix
    hilbert(&gl_ohne);
    memcpy(&gl_mit, &gl_ohne, sizeof(gl_ohne));

    // berechne ohne Spaltenpivotsuche
    gauss(&gl_ohne, 0);
    // berechne mit Spaltenpivotsuche
    gauss(&gl_mit, 1);
    ausgabe_ergebnis(&gl_ohne, &gl_mit);
  }

  return EXIT_SUCCESS;
}
```