Gruppe 1 — Claudia Heinich, 8966108
Freitag 13:15-14:45, B-Woche — Sven Pohl, 8968075
(Dr. B. Schulze) — Arne Brutschy, 8964813

Numerik

Serie 7

13\. a) Die Determinante von A lautet:

$$|A| = 0.780 \cdot 0.659 - 0.563 \cdot 0.913 = 1 \cdot 10^{-6}$$

Da sie ungleich null ist, ist die Matrix invertierbar:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} 0.659 & -0.563 \\ -0.913 & 0.780 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 659000 & -563000 \\ -913000 & 780000 \end{pmatrix}$$

Die Kondition bzgl. der Zeilensummennorm lautet:

$$\begin{aligned} cond_\infty &= ||A||_\infty \cdot ||A^{-1}||_\infty \\ &= max(1.343, 1.572) \cdot max(1222000, 1693000) \\ &= 1.572 \cdot 1693000 \\ &= 2661396 \end{aligned}$$

b) Wenn man die Determinante in $\mathbb{M}_{10,3}$ berechnet, ergeben gleich große Werte und die Determinante wird null:

$$\begin{aligned} |A| &= 0.780 \cdot 0.659 - 0.563 \cdot 0.913 \\ &= 0.514 - 0.514 \\ &= 0 \end{aligned}$$

c) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

i. Sei $a_{21} = 0.911$.

Wir berechnen die Determinante in $\mathbb{M}_{10,3}$:

$$\begin{aligned} dt(A) &= 0.780 \cdot 0.659 - 0.911 \cdot 0.563 \\ &= 0.514 - 0.513 \\ &= 0.001 \neq 0 \end{aligned}$$

und dann x_1 und x_2 mittels der Cramerschen Regel:

$$\begin{aligned} N_{x_1} &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= 0.217 \cdot 0.659 - 0.254 \cdot 0.563 \\ &= 0.143 - 0.143 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{x_2} &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \\ &= 0.780 \cdot 0.254 - 0.911 \cdot 0.217 \\ &= 0.198 - 0.198 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Somit ist nach

$$x_1 = \frac{N_{x_1}}{D}$$

$$x_2 = \frac{N_{x_2}}{D}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii. Sei $a_{21} = 0.915$.

Wir berechnen wiederum die Determinante in $\mathbb{M}_{10,3}$:

$$\begin{aligned} dt(A) &= 0.780 \cdot 0.659 - 0.915 \cdot 0.563 \\ &= -0.001 \neq 0 \end{aligned}$$

und dann x_1 und x_2 mittels der Cramerschen Regel:

$$\begin{aligned} N_{x_1} &= 0.217 \cdot 0.659 - 0.254 \cdot 0.563 \\ &= 0.143 - 0.143 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{x_2} &= 0.780 \cdot 0.254 - 0.915 \cdot 0.217 \\ &= 0.198 - 0.199 \\ &= -0.001 \end{aligned}$$

Somit ist

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

14. Wie berechnen x mittels des gegebenen Alrogrithmus.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

a) Gaußelimination ohne Pivotsuche, Pivotelement ist 0.780

$$\frac{0.915}{0.780} = 1.173$$

$$\begin{aligned} 0.915x_1 + 0.660x_2 &= 0.255 \\ 0.915x_2 + 0.659x_2 &= 0.254 \\ \\ 0.001x_2 &= 0.001 \\ x_2 &= 1 \\ \\ 0.915x_1 &= -0.405 \\ x_1 &= -0.443 \end{aligned}$$

$$x = \begin{pmatrix} -0.443 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Gaußelimination mit Spaltenpivotsuche, Pivotelement ist 0.915

$$\frac{0.780}{0.915} = 0.852$$

$$\begin{aligned} 0.780x_1 + 0.563x_2 &= 0.217 \\ 0.780x_2 + 0.562x_2 &= 0.216 \\ \\ 0.002x_2 &= 0.001 \\ x_2 &= 0.5 \\ \\ 0.780x_1 &= -0.065 \\ x_1 &= -0.083 \end{aligned}$$

$$x = \begin{pmatrix} -0.083 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$