Numerik

Serie 6

11. $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$ kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\varphi_1: \quad x_1 \to \quad & x_1^2 \\
\psi_1: \quad x_1 \to \quad & \frac{1}{1+\sqrt{1-x_1^2}} \\
\varphi_2: \quad x_2 \to \quad & 1 - x_2 \\
\psi_2: \quad x_2 \to \quad & \frac{1}{1+\sqrt{1-x_2}} \\
\varphi_3: \quad x_3 \to \quad & \sqrt{x_3} \\
\psi_3: \quad x_3 \to \quad & \frac{1}{1+\sqrt{x_3}} \\
\varphi_4: \quad x_4 \to \quad & 1 + x_4 \\
\psi_4: \quad x_4 \to \quad & \frac{1}{1+x_4} \\
\varphi_5: \quad x_5 \to \quad & \frac{1}{x_5} \\
\psi_5: \quad x_5 \to \quad & \frac{1}{x_5}
\end{aligned}$$

Für $x \in X$ erhält man in erster Näherung:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x \\
x_2 &= \varphi_1(x_1) = x^2 \\
x_3 &= \varphi_2(x_2) = 1 - x^2 \\
x_4 &= \varphi_3(x_3) = \sqrt{1-x^2} \doteq 1 - \frac{1}{2}x^2 \\
x_5 &= \varphi_4(x_4) \doteq 2 - \frac{1}{2}x^2 \\
x_6 &= \varphi_5(x_5) \doteq \frac{1}{2-\frac{1}{2}x^2} \doteq \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \left| \frac{x_1}{x_6} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x_1) \right| \doteq \left| \frac{x_1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}x_1^2} \cdot \frac{1}{4}x_1 \right| = \frac{2x_1^2}{4+x_1^2} \to 0 \\
\kappa_2 &= \left| \frac{x_2}{x_6} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}(x_2) \right| \doteq \left| \frac{x_2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}x_2^2} \cdot (\frac{1}{8} + \frac{1}{8}x_2^2) \right| = \frac{\frac{1}{8}x_2^2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}x_2^2} \to 0
\end{aligned}$$

Claudia Heinich, 8966108
Sven Pohl, 8968075
Arne Brutschy, 8964813

$$
\begin{aligned}
\kappa_3 &= \left|\frac{x_3}{x_6}\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3}(x_3)\right| \doteq \left|\frac{1-x_3^2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}x_3^2}\cdot\frac{-1}{2\cdot\sqrt{1-x_3^2}(1+\sqrt{1-x_3^2})}\right| \to \frac{1}{4}\\
\kappa_4 &= \left|\frac{x_4}{x_6}\frac{\partial\psi_4}{\partial x_4}(x_4)\right| \doteq \left|\frac{1-\frac{1}{1}x_4^2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}x_1^2}\cdot\frac{-1}{2-\frac{1}{2}x_4^2}\right| = \frac{1-\frac{1}{2}2x_4^2}{2-\frac{1}{2}x_4^2} \to \frac{1}{2}\\
\kappa_5 &= \left|\frac{x_5}{x_6}\frac{\partial\psi_5}{\partial x_5}(x_5)\right| \doteq \left|\frac{x_5}{x_6}\cdot\frac{1}{x_5^2}\right| = x_5\cdot\frac{1}{x_5} = 1
\end{aligned}
$$

wobei wir $\psi_i^{`}$, $i = \{1,\ldots,5\}$ mittels Taylorentwicklung abschätzen. Der Algorithmus ist gut konditioniert, da alle $\kappa \leq 1$ sind (und damit auch stabil).

12. a) Der Quellcode:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>


double myexp(double x) {
  double last;
  double cur;
  double k= 1.0;
  double kfak= 1.0;

  cur= 1.0 + x;
  do {
    k++;
    kfak*= k;
    last= cur;
    cur+= pow(x,k)/kfak;
  } while(last != cur);
  return cur;
}

double myexp2(double x) {
  return (x<0)?(1.0 / myexp(-x)):(myexp(x));
}

double w_liste[] = {1.0, -1.0, 3.0, -3.0, 5.0, -5.0, 7.0, -7.0, 9.0, -9.0, 0.0};

int main() {
  double* w_cur;
  double w_exp[3];
  w_cur= w_liste;

  while (*w_cur != 0.0) {
    w_exp[0]= exp(*w_cur);
    w_exp[1]= myexp(*w_cur);
    w_exp[2]= myexp2(*w_cur);
```

Claudia Heinich, 8966108
Sven Pohl, 8968075
Arne Brutschy, 8964813

```
    printf("x=%2.1f e^x=%.10f \n", *w_cur, w_exp[0]);
    printf("   myexp  =%.10f diff=%e\n", w_exp[1], w_exp[0]-w_exp[1]);
    printf("   myexp2 =%.10f diff=%e\n", w_exp[2], w_exp[0]-w_exp[2]);
    w_cur++;
  }
  return EXIT_SUCCESS;
}
```

... und seine Ergebnisse:

```
x=1.0 e^x=2.7182818285
   myexp  =2.7182818285 diff=-4.440892e-16
   myexp2 =2.7182818285 diff=-4.440892e-16
x=-1.0 e^x=0.3678794412
   myexp  =0.3678794412 diff=-5.551115e-17
   myexp2 =0.3678794412 diff=5.551115e-17
x=3.0 e^x=20.0855369232
   myexp  =20.0855369232 diff=7.105427e-15
   myexp2 =20.0855369232 diff=7.105427e-15
x=-3.0 e^x=0.0497870684
   myexp  =0.0497870684 diff=0.000000e+00
   myexp2 =0.0497870684 diff=-1.387779e-17
x=5.0 e^x=148.4131591026
   myexp  =148.4131591026 diff=2.842171e-14
   myexp2 =148.4131591026 diff=2.842171e-14
x=-5.0 e^x=0.0067379470
   myexp  =0.0067379470 diff=1.231654e-16
   myexp2 =0.0067379470 diff=-1.734723e-18
x=7.0 e^x=1096.6331584285
   myexp  =1096.6331584285 diff=6.821210e-13
   myexp2 =1096.6331584285 diff=6.821210e-13
x=-7.0 e^x=0.0009118820
   myexp  =0.0009118820 diff=7.489669e-16
   myexp2 =0.0009118820 diff=-6.505213e-19
x=9.0 e^x=8103.0839275754
   myexp  =8103.0839275754 diff=9.094947e-13
   myexp2 =8103.0839275754 diff=9.094947e-13
x=-9.0 e^x=0.0001234098
   myexp  =0.0001234098 diff=1.781954e-14
   myexp2 =0.0001234098 diff=0.000000e+00
```

Für positive x ist der Algorithmus augenscheinlich genau, da die Differenz zur e Funktion der C-Standardbibliothek im Bereich 10^{-16} liegt. Da eine double Variable ungefähr 15 Dezimalstellen besitzt, ist dies der normale Rundungsfehler. Für negative x ist der relative Fehler jedoch umso größer je größer der Betrag ist. Die kann man durch die subtraktive Auslöschung von Stellen erklären, die durch abwechselndes addieren und subtrahieren auf Grund der abwechselnd geraden und ungeraden Exponenten von x ergibt.

b) Da man hierbei eine gültige Umformung der e Funktion ausnutzt, um den ursprünglichen Algorithmus nur noch für positive x verwenden zu müssen, ergibt sich hier auch bei den negativen x der normale Rundungsfehler der Gleitkommaarithmetik (siehe a)).

c) Wir gehen hier davon aus das der Algorithmus aus a) an sich stabil ist und zeigen, wie gefordert, das $\exp x = \frac{1}{\exp -x}$ stabil ist:

$$\begin{aligned}
\varphi_1: \quad & x_1 \to && -x_1 \\
\psi_1: \quad & x_1 \to && \frac{1}{\exp -x_1} \\
\varphi_2: \quad & x_2 \to && \exp x_2 \\
\psi_2: \quad & x_2 \to && \frac{1}{\exp x_2} \\
\varphi_3: \quad & x_3 \to && \frac{1}{x_3} \\
\psi_3: \quad & x_3 \to && \frac{1}{x_3}
\end{aligned}$$

Für $x \in X$ erhält man in erster Näherung:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x \\
x_2 &= \varphi_1(x_1) = -x \\
x_3 &= \varphi_2(x_2) = \exp -x \\
x_4 &= \varphi_3(x_3) = \frac{1}{\exp -x}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \left|\frac{x_1}{x_4}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}(x_1)\right| \doteq \left|\frac{x_1 \cdot \exp -x_1}{1} \cdot \frac{-1}{\exp -x_1}\right| = |x_1| \to x \\
\kappa_2 &= \left|\frac{x_2}{x_6}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}(x_2)\right| \doteq \left|\frac{-x_2 \cdot \exp x_2}{1} \cdot \frac{1}{\exp x_2}\right| = |x_2| \to x \\
\kappa_3 &= \left|\frac{x_3}{x_6}\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3}(x_3)\right| \doteq \left| -\frac{x_3 \cdot x_3}{1} \cdot \frac{1}{x_3^2}\right| = 1
\end{aligned}$$

Somit ist der Algorithmus nach der in der Vorlesung gegebenen Definition stabil.