Gruppe 1 Claudia Heinich, 8966108
Freitag 13:15-14:45, B-Woche Sven Pohl, 8968075
(Dr. B. Schulze) Arne Brutschy, 8964813

Numerik

Serie 4

7. a) $f : \mathbb{R}^2 \to \{+, -, \pm\}$:

$$f = \begin{cases} + & \text{wenn } |x_1 - x_2| > 0 \\ - & \text{wenn } |x_1 - x_2| < 0 \\ \pm & \text{wenn } |x_1 - x_2| = 0 \end{cases}$$

f ist nicht stetig, da eine Abbildung in eine Menge die gleichmächtig mit den natürlichen Zahlen ist (und damit diskret) nie stetig sein kann (ausser es handelt sich um eine konstante Abbildung).

Ausserdem ist der Funktionswert für $|x_1 - x_2| = 0$ unendscheidbar, d.h. die Definition von f widerspricht hier direkt der Definition der "Wohlgestelltheit" in (1.16): "zu jedem x gibt es genau eine Lösung $y = f(x) \in Y$".

Damit ist diese Abbildung nicht wohlgestellt.

b) Ausgehend von den Normaxiomen formen wir um. Wir setzen $x = -x_0$:

$$\begin{array}{rcll} ||-x_0 + y|| & \leq & ||-x_0|| + ||y|| & \Big\| \cdot (-1) \\ -1 \cdot ||-x_0 + y|| & \geq & -1 \cdot (||-x_0|| + ||y||) & \\ ||x - y|| & \geq & -1 \cdot (||-x_0|| + ||y||) & \text{wir nutzen} |\alpha|||x|| = ||\alpha x|| \\ ||x - y|| & \geq & |||x|| - ||y||| & \end{array}$$

Mittels

$$\lim_{i \to \inf} ||x_i - x|| = 0$$

folgern wir,

$$0 = ||x - y|| \geq |||x|| - ||y|||$$

aus dem, da der Betrag ≥ 0 ist, folgt:

$$0 = ||x|| - ||y||$$

Daraus ergibt sich die urspüngliche Gleichung:

$$0 = \lim_{i \to \inf} ||x_i|| - ||x|| \Leftrightarrow ||x|| = \lim_{i \to \inf} ||x_i||$$

Hierbei handelt es sich um den Dedekinschen Schnitt, der eindeutig und stetig ist. Somit ist die Abbildung wohlgestellt.

c) $f : \mathbb{R}^{n,m} \to \{0, 1, \ldots, p\}$ mit $p = min(n, m)$: $f(A) = rg(A)$

f ist nicht stetig, da eine Abbildung in eine Menge die gleichmächtig mit den natürlichen Zahlen ist (und damit diskret) nie stetig sein kann (ausser es handelt sich um eine konstante Abbildung).

Claudia Heinich, 8966108
Sven Pohl, 8968075
Arne Brutschy, 8964813

Gegenbeispiel:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A_1) = 2$, aber $rg(A_2) = 1$.

Damit ist diese Abbildung nicht wohlgestellt.

8. a) $f(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\kappa_{abs} = \sup_{x \in \mathbb{X}} |f'(x)| = 1$$

Um κ_{rel} zu maximieren setzen wir $x = \frac{1}{4}$, $x_0 = 1$ und $y_0 = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \kappa_{rel} &= \sup_{x,x_0 \in \mathbb{X}, y_0 \in \mathbb{Y}} \frac{|x_0| \cdot |f'(x)|}{|y_0|} \\ &= \sup_{x,x_0 \in \mathbb{X}, y_0 \in \mathbb{Y}} \frac{1 \cdot 1}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

b) $f(x) = e^x$
$f'(x) = e^x$

$$\kappa_{abs} = \sup_{x \in \mathbb{X}} |f'(x)| = e$$

Um κ_{rel} zu maximieren setzen wir $x = x_0 = y_0 = 1$.

$$\begin{aligned} \kappa_{rel} &= \sup_{x,x_0 \in \mathbb{X}, y_0 \in \mathbb{Y}} \frac{|x_0| \cdot |f'(x)|}{|y_0|} \\ &= \sup_{x,x_0 \in \mathbb{X}, y_0 \in \mathbb{Y}} \frac{1 \cdot e^1}{1} \\ &= e \end{aligned}$$