Berechenbarkeit und Komplexität

Serie 5

1. a) Grammatik G_2:
   Folgende Grammatik erfüllt die Bedingungen, G_2 mit Startsymbol S und den Regeln $\{S \to \#, S \to u_1 S u_{\bar{1}}, \dots, S \to u_n S u_{\bar{n}}\}$.

   b) Die Lösung ist $[i_1, \dots, i_k]$. Das ergibt folgendes $w_1 \in L(G_1)$: $w_1 = u_1 \dots u_k \quad v_1 \dots v_k$ und $w_2 \in L(G_2)$, also $w_2 = u_1 \dots u_k \quad u_1 \dots u_k$. Wenn $[i_1, \dots, i_k]$ eine Lösung ist, gilt $u_1 \dots u_k = v_1 \dots v_k$ und damit $w_1 = w_2$, somit $w_1 = w_2 \in (L(G_1) \cap L(G_2))$.

   c) Es existiert ein Wort $w \in (L(G_1) \cap L(G_2))$. w hat damit nach den Definitionen der Grammatiken G_1 und G_2 folgendes Aussehen. $w = u_1 \dots u_k \quad v_1 \dots v_k = u_1 \dots u_k \quad u_1 \dots u_k$, das kann man in zwei Teilausdrücke aufteilen: $u_1 \dots u_k = u_1 \dots u_k$ und $v_1 \dots v_k = u_1 \dots u_k$. Der erste Teilausdruck ist trivial, der zweite ist die Bedingung für die Existenz einer entsprechenden Lösung mit Parameter $[1, \dots, k]$.

2. a) Die zum Graphen gehörige Formel lautet $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$. Minimiert ergibt das $(\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \overline{x}_2)$. Diese Formel ist erfüllbar, z.B. mit $x_1 = true$, $x_2 = true$ und $x_3 = false$. Der so eingefärbte Graph sieht folgender Maßen aus:

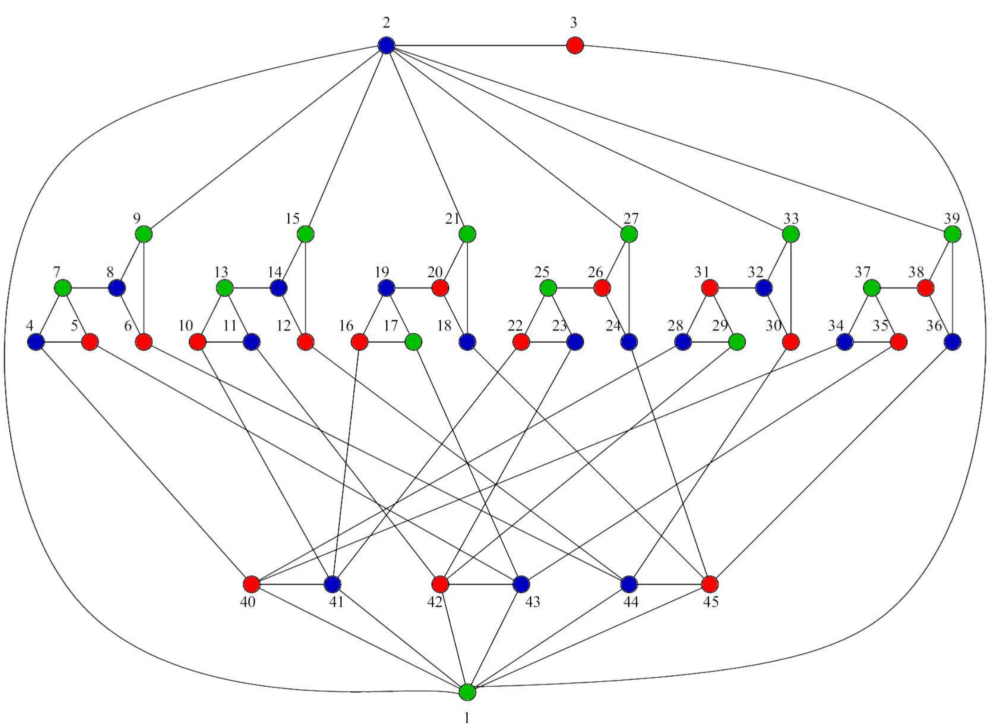

Abbildung 1: Färbung von G

b) Indirekter Beweis: Ich färbe die Knoten A,B,C und D rot. Dies bedingt, dass die jeweils angrenzenden Knoten blau und grün gefärbt werden müssen (siehe Abbildung 2, ob der an A oder der an B angrenzende Knoten grün oder blau gefärbt wird ist wahlfrei. Bei C und D gilt das selbe).
Daraus folgt dann, dass die beiden nicht eingefärbten Knoten jeweils rot eingefärbt werden müssen. Dies ergibt einen Widerspruch nach der Definition, der Färbung, da zwei angrenzende Knoten nicht die gleiche Farbe haben dürfen.

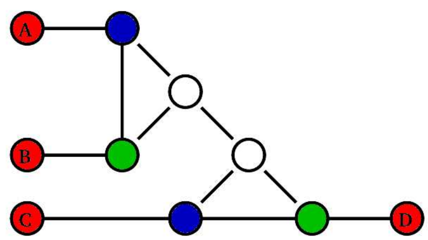

Abbildung 2: Nichtmögliche Färbung

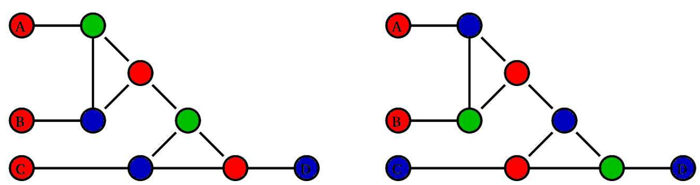

Abbildung 3: Mögliche Färbungen

Die beiden anderen Graphiken entsprechen allen möglichen Verteilungen von rot und blau auf die Knoten $A \ldots D$, da man die Knoten aufgrund der offensichtlichen Symmetrie der Figur vertauschen kann. Die möglichen Kombinationen mit drei blauen Endknoten ergeben sich durch simples Umfärben der roten und blauen Knoten.

c) Beweis:

$\rightarrow$ Die kodierte Formel ist erfüllbar $\rightarrow$ der Graph besitzt eine 3-Färbung.
Jeder der Teilgraphen $\{4\ldots9\}$,$\{10\ldots15\}$,... entspricht einer aussagenlogischen Formel in konjunktiver NF. Aufgrund der Erfüllbarkeit der kodierten Formel muss jeder Teilgraph mit min. einem rotgefärbten Knoten verbunden sein (da rot in diesem Fall wahr entspricht und ein Ausdruck der Form $(a \vee b \vee c)$ genau dann wahr ist wenn wenigstens einer der Teilausdrücke a,b oder c wahr ist).
Der Knoten 2 ist als blauer Knoten vorgegeben. Daraus folgt, dass jeder der Teilgraphen mit einem roten und einem blauen Knoten verbunden ist. Wie im ersten Teil der Aufgabe gezeigt wurde, können die beiden anderen Endknoten der Teilgraphen entweder blau oder rot sein, damit die Teilgraphen einfärbbar sind.
Somit sind alle Teilgraphen und die Ergebnisknoten $40\ldots45$ einfärbbar. Die restlichen Knoten sind gegeben, also ist der Graph einfärbbar.

$\leftarrow$ Der Graph besitzt eine 3-Färbung $\rightarrow$ die kodierte Formel ist erfüllbar.
Damit der Graph färbbar ist, müssen alle der oben besprochenen Teilgraphen färbbar sein. Wie oben gezeigt wurde dürfen die vier Endknoten der Teilgraphen nicht die gleiche Farbe haben. Da Knoten 2 als blau gegeben ist, muss jeder Teilgraph mit mindestens einem nicht-blauen (also roten) Knoten verbunden sein.
Dies bedeutet wiederum, da jeder Teilgraph einer aussagenlogischen Formel in konjunktiver NF entspricht, dass jede Formel erfüllt ist (die roten Knoten sind wahr).