Berechenbarkeit und Komplexität

Serie 4

1. a) konstante Funktionen:
Der Trugschluß ergibt sich mit der zweiten Definition:

Beispiel: In der Funktionsklasse der konstanten Funktionen gibt es u.a. zwei Funktionen $f_a(x) = 1$ und $f_b(x) = 2$, wobei a und b natürliche Zahlen sind.
Demnach hat die in 2. definierte Diagonalfunktion folgende Ergebnisse: $d(a) = f_a(a)+1 = 1+1 = 2$ und $d(b) = f_b(b)+1 = 2+1 = 3$. Damit kann $d()$ aber keine konstante Funktion sein, da es für zwei unterschiedliche Argumente unterschiedliche Rückgabewerte gibt.
Somit ist es ein Trugschluß, dass $d \in F$ sei.
Der Trugschluß der 2. Definition führt automatisch zu einem Trugschluß in der dritten Definition.

b) primitiv-rekursive Funktionen:
Die 3. Behauptung ist ein Trugschluss, da diese „Doppeldefinition“ genau der Grunddefinition einer Rekursion entspricht. Jedoch ist d trotzdem nicht in der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen enthalten, da $d(i)$ eine endlose Rekursion ergibt und somit die Diagonalfunktion nicht primitiv-rekursiv berechenbar ist.

c) totale μ-rekursive Funktionen:
Der Trugschluss ist die 2. Definition, da $d()$ für i nicht entscheidbar ist (unendliche Rekursion)und somit $d()$ keine μ-rekursiv berechenbare Funktion ist. Daraus folgt natürlich auch ein Trugschluss der 3. Definition.

d) totale Funktionen:
Da $d(i)$ nicht entscheidbar ist, ist d nicht der Klasse F der totalen Funktionen. Somit liegt der Trugschluß in der zweiten Behauptung.

e) μ-rekursive Funktionen:
Die Klasse der μ-rekursiven Funktionen ist äquivalent zu der Klasse der TM berechenbaren Funktionen. Diese Klasse hat überabzählbar viele Funktionen. Das heißt die 1. Behauptung ist ein Trugschluß, da die Funktionen in F nicht abzählbar sind und somit auch kein natürlicher Index i vergeben werden kann.

2. Es gilt: $F_\mu = TM$

   a) Die Menge der entscheidbaren Sprachen ist durch die Menge aller totalen μ-rekursiven Funktionen (Turingmaschinen) darstellbar. Somit ist $f(A)$ entscheidbar.

   b) Da alle entscheidbaren Sprachen auch aufzählbar sind, folgt direkt aus der Entscheidbarkeit von $f(A)$ die Aufzählbarkeit.

   c) Da die Umkehrfunktion einer totalen μ-rekursiven Funktionen nicht zwingend total sein muß, ist $f^{-1}(A)$ nicht allgemein entscheidbar.

   d) Da die totalen μ-rekursiven Funktionen die Sprachklasse der entscheidbaren Sprachen akzeptiert, ist $f(B)$ die Teilmenge der Sprachen von B, die entscheidbar sind. Somit ist die Aussage gültig.

   e) Die Umkehrfunktion f^{-1} muß zumindest eine partielle μ-rekursiven Funktion sein. Somit ist $f^{-1}(B)$ aufzählbar.