Berechenbarkeit und Kompexität

Serie 3

1. Beweis über verschachtelte Induktion:

   i) $y < A(x, y)$

   - Induktionsanfang: $(x = 0) : y < y + 1 = A(0, y)$, gilt also für $x = 0$
   - Induktionsannahme: Behauptung gilt fr x und fr alle y.
   - Induktionsschritt: $(x \to x + 1)$: zu zeigen ist, daß $y < A(x + 1, y)$ für $x + 1$ und alle y gilt. Ich betrachte dazu die folgende Induktion über y:
     - Induktionsanfang: $(y = 0) : 0 \overset{\text{(äußere IV)}}{<} 1 \overset{\text{Def. A}}{<} A(x, 1) = A(x + 1, 0)$
     - Induktionsannahme: Behauptung gelte für $x + 1$ und y.
     - Induktionsschritt: $(y \to y + 1)$: zu zeigen ist $(y + 1) < A(x + 1, y + 1)$
       Es gilt $A(x + 1, y + 1) \overset{\text{Def. A}}{=} A(x, A(x + 1, y))$.

       Nach Induktionsannahme der äußeren Induktion gilt:
       $A(x + 1, y) \overset{\text{(äußere IV)}}{<} A(x, A(x + 1, y))$

       Nach Induktionsannahme der inneren Induktion gilt:
       $A(x + 1, y + 1) > y$

       Demnach folgt für $x + 1$ und alle y:
       $y < A(x + 1, y)$ für $x + 1$.

     Nach Induktionsannahme gilt nun also:
     $y < y + 1 \leq A(x + 1, y) < A(x + 1, y + 1)$

     Demnach gilt ebenfalls:
     $y + 1 < A(x + 1, y + 1)$, woraus folgt
     $y < A(x, y)$

   ii) $A(x, y) < A(x, y + 1)$
   Beweis: für $x = 0$ gilt:
   $A(0, y) = y + 1 < y + 2 = A(0, y + 1)$

   Sei nun $x > 0$, so gilt nach i):
   $A(x, y) < A(x - 1, A(x, y)) = A(x, y + 1)$
   Demnach gilt also $A(x, y) < A(x, y + 1)$

iii) $A(x, y+1) \leq A(x+1, y)$
Beweis durch Induktion über y:

- Induktionsanfang: $(y = 0) : A(x, 1) \overset{\text{Def. A}}{=} A(x+1, 0)$.
- Induktionsannahme: Behauptung gilt fr alle y.
- Induktionsschritt: $(y- > y+1)$: nach i) gilt:
  $y + 1 < A(x, y+1)$, demnach natürlich auch
  $y + 2 \leq A(x, y+1)$ ¡= $A(x+1, y)$

  Unter Verwendung von ii) folgt:
  $A(x, y+2) \leq A(x, A(x+1, y)) = A(x+1, y+1)$

  Demnach gilt also auch:
  $A(x, y+1) \leq A(x+1, y)$

Unter Verwendung von i), ii) und iii) folgt schließlich, daß für alle x, y aus $\mathbb{N}$ gilt: $y < A(x, y) < A(x, y+1) <= A(x+1, y)$

2. 1. Fall: $x = x'$, $y = y'$
Es gilt trivialerweise: $A(x, y) = A(x', y')$

2. Fall: $x = x'$, $y < y'$
Es gilt nach 1. ii): $A(x, y) < A(x', y')$

3. Fall: $x < x'$, $y = y'$
Es gilt nach 1. ii) und 1. iii): $A(x, y) < A(x', y')$

4. Fall: $x < x'$, $y < y'$
Da nach 1. i) $A(x, y) < A(x+1, y+1)$ folgt,
gilt auch: $A(x, y) < A(x', y')$

In 2.-4. Fall ist zu berücksichtigen, daß die Ackermannfunktion monoton wächst, d.h. wenn die gewünschten Eigenschaften bei $x' = x + 1$, bzw. bei $y' = y + 1$ zutreffen, treffen sie auf jeden Fall auch bei $x' = x + n$, bzw. $y' = y + n$ zu.

3. a) Darstellung der Fibonacci-Funktion mittels DPR:

$F(i) = sub_2(f, \pi_1^1, \pi_1^1)$

$f(n, m) = \text{DPR}(g_0, g_1, h)$
$g_0(n) = 0$
$g_1(n) = 1$

$h(n, f(n, m-2), f(n, m-1)) = sub_2(k, \pi_2^3, \pi_3^3)$
$k(n, m) = pr(d, e)$
$d(n) = n$
$e(n, m-1, f(n, m-1)) = succ(\pi_3^3)$